

IL
NUOVO CIMENTO
ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. X, N. 3

Serie nona

1º Marzo 1953

Interazione con i nuclei e produzione dei mesoni π .

E. CLEMENTEL

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

G. PUPPI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 18 Dicembre 1952)

Riassunto. — Vari fenomeni connessi con l'assorbimento, lo scattering e la produzione dei mesoni π in materia nucleare, vengono esaminati dal punto di vista del modello ottico del nucleo. Si giunge così a stabilire, in base ai dati sperimentali, che fino ad un centinaio di MeV il fenomeno predominante è l'assorbimento, cui gradualmente si sostituisce, col crescere dell'energia, il processo di scattering. Nella produzione di mesoni da parte di protoni si è tenuto conto del frenamento dei protoni in materia nucleare per effetto delle collisioni elastiche, che ha un peso notevole in vicinanza della soglia di produzione. In tal modo è possibile prevedere in modo semplice la saturazione al crescere del numero atomico osservata nella sezione d'urto per produzione in avanti. Per la produzione all'indietro vale invece la legge $A^{2/3}$. Nella fotoproduzione, il riassorbimento dei mesoni non deforma la sezione d'urto differenziale in materia nucleare, e la dipendenza dal numero atomico, per un'opportuna scelta del cammino libero medio per cattura, risulta più ripida della legge $A^{2/3}$. I dati sperimentali esistenti suggeriscono concordemente di assegnare per tale cammino un valore compreso fra $2r_0$ e $3r_0$ ($R = r_0 A^{1/3}$) ai mesoni di energia intorno ai 60 MeV.

Introduzione.

Il meccanismo delle interazioni nucleari dei mesoni è essenzialmente ancora sconosciuto, specialmente nei riguardi della sua descrizione in termini teorici, e quindi, per ora, ogni trattazione a questo proposito si deve limitare ad una interpretazione fenomenologica dei fatti sperimentali, nella speranza che uno studio in tale senso possa essere di aiuto per la teoria futura. Vogliamo qui discutere le caratteristiche fondamentali dei processi di scattering e produzione di mesoni con l'aiuto di un modello del nucleo che si può dire l'analogo del modello ottico (¹), dimostratosi così fecondo nella interpretazione dei fenomeni di scattering ed assorbimento di nucleoni da parte di nuclei. Dato l'intervallo di energie che tratteremo, useremo essenzialmente nelle collisioni tra mesoni e particelle nucleari concetti classici e semiclassici. Ad ogni processo nucleare, quali la produzione di mesoni, l'assorbimento, lo scattering anelastico, ecc., associeremo un cammino libero medio nella materia nucleare, funzione generalmente della energia. Grandezze fisiche di questo tipo hanno significato da due punti di vista differenti: il primo consiste nell'attribuire alla materia nucleare le proprietà di un continuo omogeneo, che conservi le sue proprietà in qualunque sua parte per quanto piccola, descritto pertanto da un coefficiente di assorbimento K legato al cammino libero della relazione $K = I/\lambda$; il secondo invece consiste nel considerare la materia nucleare come un insieme di sistemi indipendenti, e in tal caso, il cammino libero medio è legato alla sezione d'urto σ per il processo in esame dalla ben nota relazione $K = 1/N\sigma$, dove N rappresenta il numero di particelle per unità di volume che possono dar luogo al processo considerato. Le due descrizioni, equivalenti per i processi incoerenti, rappresentano probabilmente una eccessiva semplificazione dell'attuale stato di cose, stante il fatto che le particelle nel nucleo sono in numero molto limitato, che sono probabilmente dotate di forti correlazioni, e che infine alla sezione d'urto elementare può essere associato un « raggio » perfettamente confrontabile con la distanza media tra due nucleoni.

Riteniamo tuttavia che queste circostanze, pur richiedendo qualche riserva sui risultati ottenuti, specie nel caso di bassi numeri atomici o energie moderate, non abbiano ad alterare la linea generale delle conclusioni raggiunte.

1. – Scattering dei mesoni π da parte di nuclei.

Inizieremo con l'analisi dei fenomeni che si presentano quando i mesoni attraversano la materia nucleare, poichè vedremo che l'esame di questo sem-

(¹) S. FERNBACH, R. SERBER e T. B. TAYLOR: *Phys. Rev.*, **75**, 1352 (1951); D. C. PEASLEE: *Phys. Rev.*, **86**, 269 (1952).

plice caso permette, dal confronto con i dati sperimentali, la definizione del cammino di assorbimento in materia nucleare, parametro essenziale per lo studio di fenomeni più complessi. Poichè tale parametro è legato al valore integrale della sezione d'urto per assorbimento, riteniamo che esso sia soddisfacentemente reso dal modello ottico, in quanto le riserve fatte nell'introduzione riguardano sostanzialmente le sezioni d'urto differenziali.

I possibili processi cui è soggetto un mesone che attraversa la materia nucleare sono l'assorbimento, lo scattering elastico e anelastico e la produzione di mesoni. L'ordine in cui i processi sono stati elencati riflette l'analogia con i processi — fotoelettrico, Compton, ecc. — subiti da un fotone che attraversa la materia. Il fatto che la generazione di coppie di nucleoni da mesone non segua lo scattering, a differenza dell'elettrodinamica dove la generazione di coppie segue l'effetto Compton, dipende ovviamente da questioni energetiche, mentre l'aver osservato processi come la generazione di mesone da mesone con frequenza confrontabile con processi di ordine inferiore dipende, nello schema dall'accoppiamento debole, dal valore elevato della costante di interazione del campo mesonico.

Sperimentalmente si osserva che alle basse energie, fino ad un centinaio di MeV, il fenomeno predominante è l'assorbimento, mentre, quando l'energia supera il precedente valore, lo scattering compete sensibilmente con la cattura; i pochi casi di produzione di mesone da mesone riguardano primari di energia intorno ai 1100 MeV, limite superiore per l'energia di un mesone che si possa riconoscere come tale nelle lastre.

Secondo i risultati sperimentali ottenuti con lastre fotografiche dal gruppo di BERNARDINI (2), gli scattering anelastici per mesoni artificiali di 45 MeV sono il 2-8% dei processi totali, mentre a 70 MeV tale percentuale sale a 11-13%, arrivando al 20-25% a 100 MeV. Per energie più elevate, dai dati riportati dal gruppo di Bristol (3), su 37 casi di interazioni nucleari di mesoni provenienti da stelle e con energia compresa fra 200 e 1100 MeV, si hanno 30 stelle, 6 scattering anelastici ad un caso di generazione di mesone da mesone. Gli ultimi sette casi, ad eccezione di uno, sono relativi a mesoni di energia superiore a 600 MeV, per cui, tenendo conto della forma dello spettro di generazione dei mesoni, si concluderebbe che la cattura predomina fino a circa 500 MeV, mentre sopra questo limite prevalgono gli altri due processi.

In realtà questa stima sottovaluta certamente il processo di scattering rispetto alla cattura per due ragioni. Anzitutto non vengono conteggiati come tali gli scattering con scambio di carica, che appaiono invece come stelle, ed

(2) G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e L. LEDERMAN: *Phys. Rev.*, **83**, 1075 (1951);
G. BERNARDINI e F. LEVY: *Phys. Rev.*, **84**, 610 (1951).

(3) U. CAMERINI *et alias*: *Phil. Mag.*, **42**, 1241 (1951).

in secondo luogo, a causa della forte degradazione di energia che accompagna quasi sempre uno scattering anelastico, buona parte dei mesoni che hanno subito un primo scattering non sfuggono ad una successiva cattura. Questa ultima correzione sarà particolarmente importante per gli elementi pesanti; a questo riguardo si può trovare una conferma nel confronto della percentuale di scattering a 60-70 MeV in lastre, già citata, con quella osservata da LEDERMANN e collaboratori (⁴) in carbonio alla stessa energia, che risulta circa doppia. Non si hanno risultati sperimentali diretti che permettano di stabilire l'importanza del processo di scattering con scambio di carica in materia nucleare. I recenti risultati del gruppo di Chicago (⁵) sullo scattering di mesoni da parte di protoni mostrano che i processi con o senza scambio di carica avvengono con frequenza confrontabile; se in materia nucleare le modalità di tale processo non differiscono sostanzialmente da quelle osservate su nucleoni liberi, si deve concludere che pure la frazione di stelle associate a scattering senza scambio di carica è confrontabile con quella dovuta a scattering con scambio. Il procedimento quindi per risalire dalla percentuale di scattering visibili alla percentuale effettiva consiste nel correggere anzitutto la prima per l'effetto del riassorbimento.

Abbiamo citato i dati sperimentali di BERNARDINI e LEDERMANN da una parte e del gruppo di Bristol dall'altra, sottolineando il fatto che in entrambi i casi l'influenza dello scattering è sottovalutata.

Poichè i due gruppi di risultati sono relativi a due intervalli energetici diversi, non sarà inutile precisare quanto segue. Nel primo caso (40-100 MeV), il processo dominante è la cattura, ed uno scattering del mesone π , sia esso accompagnato o no da una forte degradazione di energia del mesone, ha sostanzialmente l'effetto di variare il percorso medio in materia nucleare, influendo pertanto sulla probabilità globale di emergenza del mesone. È poco probabile in questo intervallo energetico la successione di due o più scattering, e di conseguenza noi ci limiteremo al caso di un solo scattering. Nel secondo caso (≥ 200 MeV) invece, dove il processo dominante è lo scattering, l'eventuale degradazione di energia è essenziale per far entrare il mesone nella zona energetica dove prevalga il processo di cattura. Pertanto, i risultati ottenuti nel caso precedente si possono estendere senz'altro alle alte energie solo nell'ipotesi che lo scattering di un mesone in materia nucleare sia accompagnato da una forte degradazione di energia. Il meccanismo con cui tale degradazione dovrebbe aver luogo non è ancora precisabile, ed avrebbe come effetto una forte eccitazione del nucleo (⁶). Se invece il processo di scattering avviene con

(⁴) H. BYFIELD, J. KESSLER e L. LEDERMAN: *Phys. Rev.*, **86**, 17 (1952).

(⁵) E. FERMI, H. L. ANDERSON, A. LUNDBY, D. E. NAGLE e G. B. YODH: *Phys. Rev.*, **85**, 935 (1952).

(⁶) K. A. BRUCKNER, R. SERBER e K. M. WATSON: *Phys. Rev.*, **84**, 258 (1952).

piccola degradazione di energia, allora bisogna ricorrere ad un calcolo più complicato, basato sullo scattering plurimo nel nucleo. Per la discussione di tale caso rimandiamo al lavoro di BONETTI, DALLAPORTA e collaboratori (7).

Riprendendo ora il problema della correzione della percentuale di scattering dovuta al riassorbimento dei mesoni, calcoliamo anzitutto la probabilità che un mesone che ha subito uno scattering anelastico in un punto a distanza ϱ dal centro del nucleo, emerga dal nucleo stesso sfuggendo al processo di cattura, che per le ipotesi fatte è il solo processo che in questa seconda fase va considerato. Ammesso che la distribuzione angolare del mesone dopo lo scattering sia isotropa, indicando con R il raggio del nucleo, con t la distanza da percorrere nel nucleo dopo l'urto e con ϑ l'angolo fra i due segmenti ϱ e t , la nota legge $W(\vartheta) d\vartheta = \sin \vartheta d\vartheta/2$, che traduce l'isotropia della distribuzione angolare del mesone, si può anche scrivere

$$(1) \quad W(R, \varrho, t) = \frac{1}{4\varrho} (R^2 - \varrho^2 + t^2) \frac{dt}{t^2},$$

con $R - \varrho \leq t \leq R + \varrho$. Pertanto, se λ_c è il cammino libero medio per cattura del mesone in materia nucleare, la probabilità di emergenza cercata è data dalla

$$(2) \quad P(R, \varrho, \lambda_c) = \int_{R-\varrho}^{R+\varrho} W(R, \varrho, t) \exp\left[-\frac{t}{\lambda_c}\right] dt,$$

che con $z_c = 2R/\lambda_c$ e $\xi = \varrho/R$ si può scrivere in forma adimensionale

$$(3) \quad P(z_c, \xi) = \frac{1}{4} \left(\frac{z_c + 2\xi + z_c \xi}{z_c \xi} \right) \exp\left[-\frac{z_c}{2}(1 - \xi)\right] - \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{z_c + 2\xi - z_c \xi}{z_c \xi} \right) \exp\left[-\frac{z_c}{2}(1 + \xi)\right] - \frac{1}{4} \frac{z_c}{\xi} \left(\frac{1 - \xi^2}{2} \right) I\left\{\frac{z_c}{2}(1 - \xi), \frac{z_c}{2}(1 + \xi)\right\},$$

dove

$$(4) \quad I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \exp[-x] \frac{dx}{x}.$$

In fig. 1 è dato l'andamento di $P(z_c, \xi)$ per una serie di valori di z_c tale da coprire, con i dati sperimentali attuali su λ_c , tutto il sistema periodico degli elementi.

(7) A. BONETTI, N. DALLAPORTA, M. MERLIN e G. DASCOLA: *Nuovo Cimento*, **10**, 215 (1953).

È facile ora dare la probabilità di emergenza tenendo conto anche dello scattering anelastico. Con ovvio significato di λ_s si ha

$$(5) \quad Q(R, \lambda_t, \lambda_s) = \int_0^{2R} p(l) dl \int_0^l \exp \left[-\frac{x}{\lambda_t} \right] \frac{dx}{\lambda_s} P(R, \sqrt{R^2 + x^2 - lx}),$$

dove λ_t è il cammino d'urto totale, e $p(l)$ è il noto fattore di peso per la distanza l percorsa nel nucleo. Per sfruttare la (3) basta invertire le integrazioni su x ed l ; con la nuova variabile $y = x/2R$ e con $z_t = 2R/\lambda_t$, $z_s = 2R/\lambda_s$, si ha allora in forma adimensionale

$$(6) \quad Q(z_t, z_s) = z_s \int_0^1 \exp [-z_t y] dy \int_{|1-2y|}^1 \left\{ 1 + \frac{1}{4y^2} (1 - \xi^2) \right\} P(z_c, \xi) \xi d\xi.$$

Per il calcolo della funzione $Q(z_t, z_s)$ nel caso di una distribuzione $W(\vartheta)$ qualunque, rimandiamo al paragrafo seguente. In fig. 2 è dato l'andamento della grandezza $Q(z_t, z_s)/z_s$ per $0 \leq z_t \leq 6$ e per alcuni valori di z_c .

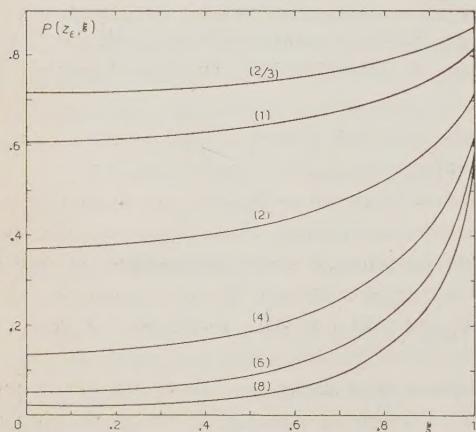


Fig. 1. — Probabilità di emergenza di un mesone di cammino libero medio per cattura $\lambda_c = 2R/z_c$ da un nucleo di raggio R , in funzione della distanza ξR dal centro del nucleo, nell'ipotesi dell'isotropia della direzione di emergenza. I numeri in parentesi si riferiscono al valore di z_c .

Per quanto riguarda l'estensione di questi risultati ad energie più elevate, possiamo far vedere come i dati sperimentali non siano in disaccordo con l'ipotesi di un unico scattering con grande perdita di energia. Se si corregge infatti la percentuale degli scattering visibili, circa 0,20, osservati in lastre del gruppo di Bristol per il precedente fattore di visibilità, che prenderemo dell'ordine

I dati sperimentali per mesoni di 60 MeV in carbonio (4) suggeriscono di assumere per il rapporto λ_s/λ_c un valore di circa 4. Dalla $1/\lambda_t = 1/\lambda_s + 1/\lambda_c$ segue che $z_c = (4/5)z_t$. Con $R = r_0 A^{1/3}$ ed assegnando alle lastre un peso atomico $A=100$, dalle curve della fig. 2 si ricava $Q(C)/Q$ (lastre) = 2,25 per $\lambda_t = 2r_0$, mentre per $\lambda_t = 3r_0$ il valore del rapporto scende a 2,0. Si può pertanto concludere che il numero di eventi anelastici osservabili in carbonio è doppio di quello che si osserverebbe in lastre, il che concorda con i risultati sperimentali già citati.

di 2,5 per tener conto della non completa trasparenza del carbonio, si ottiene la frazione di scattering effettivamente avvenuti nel nucleo. Questi scattering però riguardano solo i casi in cui non vi è stato scambio di carica, per cui, se si assume che i processi con e senza scambio siano confrontabili, si giunge alla conclusione che benché gli scattering visibili siano solo circa 1/5, il fenomeno predominante ad energie fra 200 e 1000 MeV può essere ugualmente lo scattering anelastico. In altre parole questo significa che 4/5 delle stelle non sono dovute a cattura diretta, ma sono «secondarie» di uno scattering anelastico. Possiamo pertanto concludere che le percentuali di stelle e di scattering osservati per energie dei mesoni fra 200 e 1000 MeV sono compatibili con le ipotesi: a) che il processo predominante sia lo scattering con forte degradazione di energia; b) che i processi con e senza scambio di carica abbiano peso confrontabile.

Riassumendo, il quadro sperimentale è in accordo con la definizione di un cammino totale anelastico (cattura più scattering) compreso fra $2r_0$ e $3r_0$ per energie moderate, e non superiore a questo limite per alte energie. Inoltre si può dire che al fenomeno di cattura, dominante alle basse energie, si sostituisce gradualmente per energie superiori ad un centinaio di MeV il processo di scattering.

Ci si può rendere conto qualitativamente di questa separazione fra i due processi pensando che, mentre nel processo di cattura intervengono almeno due nucleoni, nel processo di scattering l'interazione è fra il mesone ed un nucleone: il primo processo giocherà quindi in modo sensibile fino ad energie per cui la lunghezza d'onda associata del mesone (λ) si mantiene confrontabile con la distanza media fra due nucleoni. La distanza fra due nucleoni in un nucleo è ora dell'ordine di $\hbar/m_\pi c = 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm, mentre per un mesone π di 100 MeV si ha $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-13}$ cm.

2. — Produzione dei mesoni π da parte di nucleoni.

Passiamo ora ad applicare il modello ottico del nucleo al fenomeno di produzione di mesoni in materia nucleare da parte di nucleoni. I risultati sperimentali finora ottenuti sono relativi a primari di energia non molto superiore

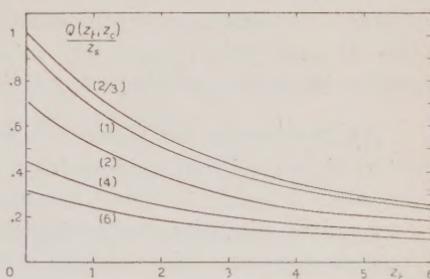


Fig. 2. — $Q(z_t, z_c)$ è la probabilità di emergenza di un mesone dopo aver subito uno scattering anelastico; $2R/z_t$, $2R/z_s$ e $2R/z_c$ sono rispettivamente i liberi cammini medi totale, per scattering e per cattura. I numeri in parentesi si riferiscono al valore di z_c .

all'energia di soglia. Per stabilire quindi un legame fra la sezione d'urto elementare (urto fra due nucleoni liberi) e quella in materia nucleare è essenziale tener conto della distribuzione dei momenti dei nucleoni nel nucleo, del principio di esclusione di Pauli, del frenamento in materia nucleare dei nucleoni incidenti e dei cambiamenti dello stato di carica. Non ci occuperemo in questo lavoro di quest'ultimo punto, che interessa sostanzialmente la questione del rapporto fra mesoni positivi e negativi.

A) *Distribuzione dei momenti.* — Sull'andamento della sezione d'urto elementare si hanno i dati sperimentali⁽⁸⁾ per 340 e 381 MeV: $1,6 \pm 0,5$ rispettivamente $(7,3 \pm 2,3) \cdot 10^{-27}$ cm². L'andamento teorico calcolato da BRUCKNER⁽⁹⁾ per mesoni pseudoscalari con accoppiamento pseudovettoriale sembra rendere il rapporto che segue dai precedenti valori, per quanto, dati i forti errori sperimentali, il confronto fra teoria ed esperienza non sia ancora critico. Si vede comunque che la sezione d'urto, nell'intervallo energetico considerato, si può sempre approssimare con una funzione del tipo

$$(7) \quad \sigma(P) = A \left(\frac{P^2 - P_s^2}{M^2 c^2} \right)^n,$$

dove P è il momento del nucleone incidente, M la sua massa e P_s il momento che corrisponde all'energia di soglia.

Nell'urto nucleone-nucleo la (6) va mediata sulla sfera di Fermi in base alla distribuzione

$$(8) \quad n(p) dp d\zeta = \frac{3}{2p_{\max}^3} p^2 dp d(-\zeta),$$

dove $\zeta = \cos \vartheta$ e p_{\max} è il momento massimo della distribuzione. La sezione d'urto mediata vale pertanto⁽¹⁰⁾

$$(9) \quad \bar{\sigma}(P_0) = \frac{3}{2p_{\max}^3} \int p^2 dp \int \frac{|\mathbf{P}_0 - \mathbf{p}|}{P_0} \sigma(P) d\zeta,$$

dove $P^2 = P_0^2 + p^2 - 2P_0 p \zeta$, avendo indicato con P_0 l'impulso del nucleone incidente. Per quanto riguarda i limiti di integrazione bisogna distinguere i tre casi:

⁽⁸⁾ M. N. WHITEHEAD e C. RICHMAN: *Phys. Rev.*, **83**, 855 (1951); S. PASSMAN, M. M. BLOCK e W. W. HAVENS: *Phys. Rev.*, **83**, 167 (1951).

⁽⁹⁾ K. BRUCKNER: *Phys. Rev.*, **82**, 598 (1951); K. M. WATSON e K. BRUCKNER: *Phys. Rev.*, **83**, 1 (1952).

⁽¹⁰⁾ J. SCHWNIGER: *Phys. Rev.*, **58**, 1004 (1940).

- 1) $P_0 - P_s \geq p_{\max}$: $0 \leq p \leq p_{\max}$, : $1 \leq \zeta \leq +1$;
- 2) $0 \leq P_0 - P_s \leq p_{\max}$: in questo caso l'integrale (8) si spezza nella somma di due integrali con i seguenti limiti:
 - a) $0 \leq p \leq P_0 - P_s$, $-1 \leq \zeta \leq +1$,
 - b) $P_0 - P_s \leq p \leq p_{\max}$, $-1 \leq \zeta \leq \zeta_{\max}$,
dove $\zeta_{\max} = (P_0^2 + p^2 - P_s^2)/2P_0p$;
- 3) $0 \leq P_s - P_0 \leq p_{\max}$: $P_s - P_0 \leq p \leq p_{\max}$, $-1 \leq \zeta \leq \zeta_{\max}$.

Passando nella (8) dalla variabile ζ alla P , esprimendo gli impulsi in unità P_s ed invertendo quindi le due integrazioni, con $y = P/P_s$ ed analogamente $y_{\max} = p_{\max}/P_s$, $y_0 = P_0/P_s$, si ottiene per la sezione d'urto mediata la semplice relazione

$$(10) \quad \bar{\sigma}(P_0) = A \frac{3}{2} \left(\frac{P_s}{Mc} \right)^{2n} \frac{\Phi(y_0)}{y_{\max}^3 y_0^2},$$

dove si è posto

$$(11) \quad \Phi(y_0) = \frac{1}{2} (y_{\max}^2 - y_0^2) F_2^n(a, b) + y_0 F_3^n(a, b) - \frac{1}{2} F_4^n(a, b),$$

con

$$(12) \quad F_m^n(a, b) = \int_a^b y^m (y^2 - 1)^n dy.$$

I limiti di integrazione per la (12) sono $a = y_0 - y$, $b = y_0 + y_{\max}$ per $P_0 - P_s \geq p_{\max}$, mentre $a = 1$, $b = y_0 + y_{\max}$ negli altri due casi.

Nota la sezione d'urto sperimentale di produzione $\bar{\sigma}(P_0)$ in funzione di P_0 , tramite le (10), (11) e (12), si potrebbe determinare l'esponente n della legge elementare (7) per energie nell'intorno della soglia di produzione. Nella (9) resta da fissare ancora il valore di n ; mentre i risultati teorici di BRUCKNER suggerirebbero un valore $n = 2$ ($A = 8 \cdot 10^{-27}$), i dati sperimentali per 340 e 381 MeV non escludono un valore superiore compreso fra $n = 2$ ed $n = 3$: per $n = 2$ si ha un rapporto $\sigma(380)/\sigma(340) = 3,4$, mentre per $n = 3$ ($A = 4 \cdot 10^{-23}$) si passa a 5,2. Il valore di soglia P_s della sezione d'urto elementare è di 792 MeV/c, che corrisponde all'energia $2m_\pi c^2 = 290$ MeV; nella sfera di Fermi il nuovo valore di soglia resta fissato dall'uguaglianza $P_s - P_0 = p_{\max}$, e quindi con un $p_{\max} = 218$ MeV/c (25 MeV) si ha $P_0 = 547$ MeV/c (160 MeV).

A meno di un piccolo intervallo in prossimità della nuova energia di soglia, le sezioni d'urto in materia nucleare ci risultano ben rappresentate dalle funzioni $1,32 \cdot 10^{-34}$ ($E_0 - 175$)³ per $n = 2$, e $1,58 \cdot 10^{-36}$ ($E_0 - 175$)⁴ per $n = 3$, avendo espresso E_0 in MeV. Il rapporto $\bar{\sigma}(380)/\bar{\sigma}(340)$ scende quindi a 1,9 per $n = 2$ ed a 2,5 per $n = 3$. Sperimentalmente, per i mesoni positivi misurati a 90° nel sistema del laboratorio, i rapporti sono $2,2 \pm 0,1$ per il carbonio e $1,7 \pm 0,1$ per il piombo (11).

Risultati e formule fin qui dati per la produzione in materia nucleare ignorano il principio di esclusione di Pauli.

B) *Principio di esclusione di Pauli.* — Il principio di Pauli riduce la sezione d'urto in materia nucleare rispetto a quella calcolata, in quanto restano esclusi quei processi di generazione nei quali uno od entrambi i nucleoni si trovano ad avere nello stato finale un momento inferiore al valore massimo della sfera di Fermi. È chiaro pertanto che al crescere dell'energia del primario la correzione introdotta dal principio diventa sempre meno importante. Abbiamo considerato l'influenza di tale principio per un'energia del primario di 340 MeV e per vari valori del momento dei nucleoni della sfera di Fermi, e ci siamo convinti che, non interessando a noi il problema della forma dello spettro dei mesoni emessi, ma solo il confronto della produzione in vari elementi, le incertezze nella sezione d'urto in funzione dell'energia del primario sono tali da rendere secondario il problema della presente correzione. In particolare, nell'ipotesi che gran parte dell'energia disponibile nel centro di massa vada al mesone prodotto, il principio di Pauli ha senz'altro poco peso.

C) *Frenamento in materia nucleare.* — Come si è visto, la sezione d'urto per produzione di mesoni è una funzione rapidamente variabile dell'energia in vicinanza della soglia, per cui, specie per i nuclei pesanti, è importante tener conto del frenamento del nucleone incidente per effetto delle collisioni elastiche subite nell'attraversamento del nucleo. In altre parole, per effetto del frenamento, l'energia del nucleone, e con essa la sezione d'urto per produzione di mesoni, diminuisce progressivamente con lo spessore di materia attraversato.

Si può tener conto di questo fatto o introducendo una perdita continua di energia, o con un metodo di collisioni successive, che ci sembra più aderente alla realtà, dato che il frenamento si realizza in poche collisioni e d'altra parte in ognuna di queste la cessione media è notevole e le fluttuazioni sono larghe, come dimostrano le esperienze di attraversamento di nuclei leggeri sia da parte di neutroni che da parte di protoni (12).

(11) R. RICHMAN, M. WEISSBLUTH e H. A. WILCOX: *Phys. Rev.*, **85**, 161 (1952); M. M. BLOCK, S. PASSMAN e W. W. HAVENS: *Phys. Rev.*, **85**, 718 (1952).

(12) J. DE JUREN e B. J. MOYER: *Phys. Rev.*, **81**, 919 (1951); J. B. CLADIS, W. N. HESS e B. J. MOYER: *Phys. Rev.*, **87**, 425 (1952).

In questa seconda impostazione, se un solo urto elastico bastasse per rendere inefficiente il nucleone agli effetti della produzione di mesoni, la traduzione analitica della legge del frenamento sarebbe data semplicemente dal fattore probabilistico $\exp[-y/\lambda]$, essendo y lo spessore di materia nucleare attraversato e λ il cammino libero medio per i processi elastici. In realtà un nucleone, anche dopo un urto elastico, ha ancora una certa probabilità di generare mesoni, e si dovrebbe tener conto di questo ulteriore contributo degli urti successivi.

Noi qui daremo la sezione d'urto differenziale per produzione di mesoni da parte di nucleoni tenendo conto solo del primo contributo, in quanto, dato l'intervallo energetico considerato, il contributo del secondo urto è già piccolo nel caso della produzione in avanti, fra tutti il più favorevole, giacchè gli urti successivi, spostando il punto di generazione nella direzione di emergenza, diminuiscono l'effetto di assorbimento sui mesoni (13).

Indicando con $\sigma_0(E, \theta)$ la sezione d'urto differenziale per produzione di mesoni in materia nucleare, e con $\sigma(E, \theta)$ l'analogia sezione d'urto contro nuclei, sempre nell'ambito del modello ottico, ed a parte il fattore statistico che tenga conto del segno dei mesoni, si ha

$$(13) \quad \sigma(E, \theta) = \pi R^2 \left(\frac{A}{V} \right) \sigma_0(E, \theta) \int_0^{2R} p(l) dl \int_0^l \exp \left[-\frac{y}{\lambda} \right] dy \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{d}{\lambda} \right] dq ,$$

(13) I nucleoni che hanno compiuto un urto elastico si presenteranno con una certa distribuzione energetica $F(E)$, per la quale ci serviremo di quella ottenuta da DE JUREN e MOYER. Nota tale distribuzione, si può valutare la sezione d'urto media per produzione di mesoni dopo un urto elastico

$$\sigma_0(E', \theta) = \frac{\int_0^E F(E) \sigma_0(E, \theta) dE}{\int_0^E F(E) dE} .$$

Usando ora la $\sigma_0(E', \theta)$ in una formula analoga alla (13), salvo la presenza del fattore di probabilità per il processo elastico, per $\theta = 0^\circ$ l'attuale contributo ha l'espressione ($z = z'$)

$$\sigma'(E, 0^\circ) = A \sigma_0(E', 0^\circ) \mathcal{Q}'(z, 0^\circ) ,$$

dove $\mathcal{Q}'(z, 0^\circ) = (3/2)[\mathcal{Q}(z, 0) - e^{-z}]$. La somma dei due contributi dà pertanto

$$A \sigma_0(E, 0^\circ) \{ \mathcal{Q}(z, 0^\circ) + [\sigma_0(E', 0^\circ)/\sigma_0(E, 0^\circ)] \mathcal{Q}'(z, 0^\circ) \} .$$

Assumendo come valore del rapporto fra le sezioni d'urto differenziali quello dato dal rapporto fra le sezioni d'urto integrali, dalle formule ottenute in A) seguono per $E = 340$ MeV i valori 0,14 e 0,09 rispettivamente per $n = 2$ ed $n = 3$. Poichè $\mathcal{Q}(z, 0)$ e $\mathcal{Q}'(z, 0^\circ)$ sono dello stesso ordine di grandezza, si vede che la correzione è molto piccola.

dove $d(R, l, y, \vartheta, \varphi)$ rappresenta la distanza che il mesone generato nel punto (l, y) deve percorrere per uscire dal nucleo di raggio R in direzione individuata dagli angoli (ϑ, φ) . Come si riconosce con facili considerazioni geometriche, assumendo quale asse polare la direzione di incidenza, tale distanza è una radice dell'equazione

$$(14) \quad d^2 + d \{ (l - 2y) \cos \vartheta + 2\sqrt{R^2 - (l/2)^2} \sin \vartheta \cos \varphi \} + y(y - l) = 0.$$

È conveniente introdurre le variabili adimensionali $y = y/l$, $l' = l/2R$, $d' = d(R, l', y', \vartheta, \varphi)/2R$, giacchè la (13) si può allora scrivere nella forma compatta e di evidente significato fisico

$$(15) \quad \sigma(E, \vartheta) = A\sigma_0(E, \vartheta)\mathcal{N}(z, z_c, \vartheta),$$

dove

$$(16) \quad \mathcal{N}(z, z_c, \vartheta) = (3/\pi) \int_0^1 l'^2 dl' \int_0^1 \exp[-zl'y'] dy' \int_0^\pi \exp[-z_c d'] d\varphi,$$

Per discutere i risultati essenziali del nostro modello, abbiamo calcolato l'espressione (16) nel caso $z = z_c$; questa scelta ci sembra abbastanza ragionevole, dato che i valori più probabili tanto di λ quanto di λ_c , che si possono ricavare dalle esperienze, cadono intorno al valore $2r_0$.

Con tale semplificazione, nei due casi particolari di $\vartheta = 0^\circ$ e $\vartheta = 180^\circ$ si ha

$$(17) \quad \mathcal{N}(z, 0^\circ) = \frac{6}{z^3} \left\{ 1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} \right) \exp[-z] \right\},$$

$$(18) \quad \mathcal{N}(z, 180^\circ) = \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} (1 - (1 + 2z) \exp[-2z]) \right\}.$$

Il significato della (15) risulta chiaro ponendo una volta $z = 0$, e una volta $z_c = 0$. Nel caso $z = 0$, che descrive la produzione da parte di una primaria non assorbita, realizzata ad esempio dai fotoni, poichè $A\sigma_0(E, \vartheta)$ rappresenta il numero medio di mesoni prodotti, la quantità $\mathcal{N}(0, z_c, \vartheta)$ dà la frazione di tali mesoni che sfugge all'assorbimento. Nel caso $z_c = 0$ invece, che si riferisce ad una secondaria non assorbita, la quantità $\mathcal{N}(z, 0, \vartheta)$ rappresenta la frazione di nucleoni che contribuiscono alla produzione. Si noti che nel caso particolare da noi considerato con $z = z_c$, si ha che per $z \rightarrow 0$ è $\lim \mathcal{N}(z, \vartheta) = 1$, come ovviamente dev'essere, in quanto con tale limite si realizza un nucleo del tutto trasparente agli effetti dell'assorbimento sia per la primaria che per la secondaria prodotta.

TABELLA I.

z	1	2	3	4	5	6	ϑ
$\mathcal{N}(z, z_c; \vartheta)$ $(z = z_c)$	0,482	0,243	0,128	0,0714	0,0421	0,0261	0°
	0,486	0,256	0,146	0,0918	0,0618	0,0447	45°
	0,507	0,306	0,195	0,144	0,116	0,0987	90°
	0,519	0,321	0,225	0,174	0,144	0,122	135°
	0,527	0,332	0,236	0,182	0,150	0,126	180°
$\mathcal{F}(z)$	0,707	0,527	0,411	0,332	0,277	0,236	—

In tab. I ed in fig. 3 sono dati i valori e l'andamento di $\mathcal{N}(z, \vartheta)$ per $1 \leq z \leq 6$ e per alcuni valori di ϑ fra 0° e 180° . Da queste curve si può risalire all'andamento della sezione di urto in funzione del numero atomico per un dato angolo, oppure, fissato un elemento, vedere come la distribuzione angolare all'atto di generazione venga deformata per effetto dell'assorbimento.

In fig. 4 è data per $A = 27$ (Al), 100 (lastre) e 208 (Pb) e $\lambda = 2r_0$ la $\mathcal{N}(z, \vartheta)$, che rappresenta il rapporto fra la sezione d'urto per nucleone $\sigma(E, \vartheta)/A$ effettiva e la sezione d'urto $\sigma_0(E, \vartheta)$ all'atto di produzione. Come si vede chiaramente dalle curve, la distribuzione angolare di produzione subisce nell'intervallo 0° - 90° una deformazione che aumenta col numero atomico, mentre nell'intervallo 90° - 180° la deformazione è meno evidente e l'assorbimento si rivela solo come fattore di riduzione. È chiaro pertanto che ove da una distribuzione sperimentale $\sigma(E, \vartheta)/A$ si voglia risalire alla $\sigma_0(E, \vartheta)$, basterà valersi di curve del tipo di fig. 4. Vi è da notare che il tener conto delle collisioni successive, favorendo la produzione in avanti, tenderà a ridurre l'asimmetria delle curve. Come già detto, per energie dei primari attualmente disponibili per la produzione artificiale di mesoni, la correzione non è significativa. Con primari di energia sensibilmente più elevata, il frenamento in materia nucleare ha

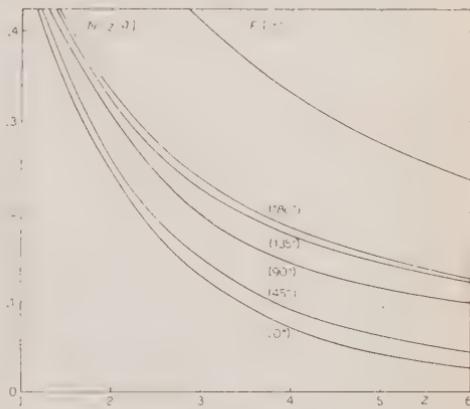


Fig. 3. — Andamento delle funzioni $\mathcal{F}(z)$ e $\mathcal{N}(z, z_c, \vartheta)$ per $z = z_c$ in funzione di z ; $2R/z$ è il libero cammino medio per i processi elastici dei nucleoni.

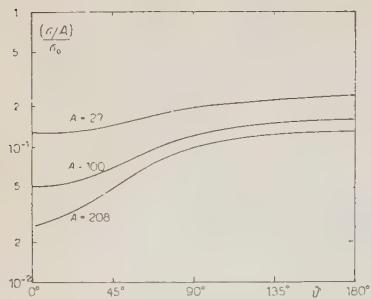


Fig. 4. — Andamento del rapporto $(\sigma/A)/\sigma_0 = \mathcal{P}(z, z_c, \theta)$ per $z = z_c$ in funzione di θ per tre valori di $R = r_0 A^{1/3}$, avendo scelto $\lambda = 2r_0$.

piombo. Trattandosi di una primaria protonica, il numero di mesoni positivi è proporzionale alla somma $\sigma_{PP}(Z/A) + (\sigma_{PN}/2)(A - Z)/A$, mentre i mesoni negativi sono proporzionali a $(\sigma_{PN}/2)(N/A)$: i fattori statistici di produzione sono pertanto N/A per i neutroni, Z/A e $(A + Z)/2A$ per i protoni nelle due ipotesi $\sigma_{PP} \gg \sigma_{PN}$ rispettivamente $\sigma_{PP} = \sigma_{PN}$. La curva superiore a tratto continuo della figura si riferisce al primo caso, quella inferiore al secondo. In ambedue i casi l'andamento delle curve denuncia chiaramente una saturazione della sezione d'urto col crescere del numero atomico, ed i punti sperimentali riportati in figura e relativi ad una recente esperienza⁽¹⁴⁾ sulla produzione di mesoni positivi di 53 ± 4 MeV a $0^\circ \pm 7^\circ$ da parte di protoni di 340 MeV confermano, nonostante i forti errori, questo effetto di saturazione. La tratteggiata (a) della figura rappresenta il puro andamento $A^{2/3}$, mentre la (b) riproduce l'andamento della funzione

sempre meno importante, poichè le perdite relative di energia negli attraversamenti nucleari decrescono gradualmente. Si tende così al caso limite $z = 0$, e, se la sezione d'urto per produzione non presenta una saturazione rapida, si dovrebbe realizzare una condizione caratterizzata da una primaria poco assorbita, analoga a quella che si ha nella fotoproduzione.

In fig. 5 è dato l'andamento in funzione del numero atomico della sezione d'urto per produzione di mesoni positivi da parte di protoni per $\theta = 0^\circ$, $\lambda = 2r_0$ e normalizzando ad uno per il

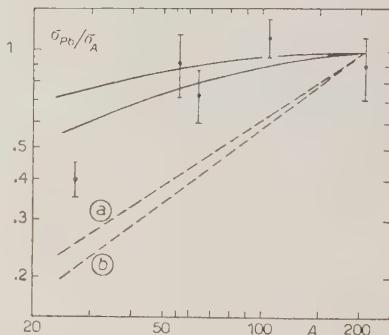


Fig. 5. — Andamento in funzione del numero atomico della sezione d'urto per produzione di π^+ da parte di protoni per $\theta = 0^\circ$ e $\lambda = 2r_0$. I dati sperimentali sono relativi a π^+ di 53 ± 4 MeV prodotti da protoni di 340 MeV nell'intervallo angolare $0^\circ \pm 7^\circ$. La curva superiore a tratto continuo riflette l'ipotesi $\sigma_{PP} \gg \sigma_{PN}$, quella inferiore l'ipotesi $\sigma_{PP} = \sigma_{PN}$. La tratteggiata (a) dà il puro andamento $A^{2/3}$, mentre la (b) riproduce l'andamento della funzione $A\mathcal{F}(z)$.

(14) D. H. HAMLIN, M. JAKOBSON, J. MERRIT e A. SCHULZ: *Phys. Rev.*, **84**, 857 (1951).

$A\mathcal{F}(z)$ [cfr. (20)], e dà, a meno del fattore statistico, la curva di produzione quale seguirebbe dalla (13) ignorando il frenamento della componente generatrice. Nelle due curve a tratto continuo è tenuto conto del contributo del secondo urto⁽¹³⁾ scegliendo per l'esponente n il valore 2. Si ottengono praticamente le stesse curve con $n = 3$. Con un cammino $\lambda = 3r_0$ la saturazione è invece più lenta e l'accordo con i risultati sperimentali è meno soddisfacente. Analiticamente la saturazione per la produzione in avanti si riconosce subito dalla $\sigma(E, 0^\circ) = A\sigma_0(E, 0^\circ)\mathcal{N}(z, 0^\circ)$: infatti A/z^3 è una costante, e la funzione $z^3\mathcal{N}(z, 0^\circ)$ tende subito al valore asintotico 6 col crescere di z . Qualitativamente ci si può rendere conto di questo fatto pensando che, per R molto grande, la porzione di nucleo efficace alla produzione di mesoni si riduce praticamente alla zona equatoriale di spessore dell'ordine di λ , e pertanto di volume $(\pi/2)\lambda^3$, indipendente cioè dal raggio del nucleo. Ben diverso è invece l'andamento della $\sigma(E, 180^\circ)$: poiché già per numeri atomici medi il secondo termine della (18) è trascurabile rispetto al primo, la sezione d'urto presenta la dipendenza A/z , vale a dire $A^{2/3}$.

In fig. 6 si è fatto un confronto fra la $\sigma(E, 45^\circ)$ ed i dati⁽¹⁵⁾ sulla produzione di mesoni negativi di 40 MeV da parte di protoni di 240 MeV nell'intervallo angolare 30° - 50° . Anche qui si è usata la normalizzazione della figura precedente e le curve tratteggiate hanno il significato già visto. I punti sperimentali sono certo a favore di una teoria che tenga conto del frenamento dei protoni. Il dato relativo all'alluminio presenta uno scarto dalla curva teorica più forte che quelli d' ${}^{61}\text{Cu}$ ($A=64$) e dell' Ag ($A=107$), probabilmente perchè col decrescere del numero atomico le condizioni di applicabilità del modello ottico sono sempre meno soddisfatte. Non ci è stato possibile prendere le misure sulla produzione di mesoni positivi di 40 MeV da parte di protoni di 240 MeV nell'intervallo angolare 130° - 150° , nè, in assenza di altri dati sperimentali, siamo stati in grado di trovare la ragione del disaccordo.

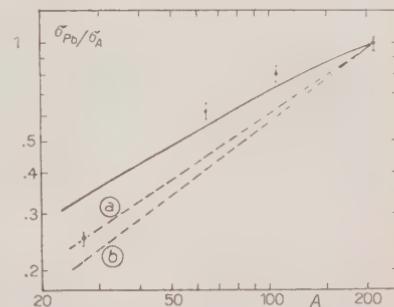


Fig. 6. - Andamento in funzione del numero atomico della sezione d'urto per produzione di π^- da parte di protoni per $\vartheta = 45^\circ$ e $\lambda = 2r_0$. I dati sperimentali sono relativi a π^- di 40 MeV prodotti da protoni di 240 MeV nell'intervallo angolare 30° - 50° . Per il significato delle curve tratteggiate vedi figura 5.

⁽¹⁵⁾ D. L. CLARK: *Phys. Rev.*, **87**, 157 (1952).

3. – Produzione dei mesoni π da parte di fotoni.

La formula (15), che dà la sezione d'urto differenziale per produzione di mesoni da parte di nucleoni, vale anche nel caso dei fotoni purchè si ponga $z = 0$. In tal modo il fattore di riduzione $\mathcal{N}(0, z_c, \vartheta)$ dipende solo dall'assorbimento dei mesoni, e le esperienze di fotoproduzione su nuclei sono pertanto indicate per risalire al cammino libero medio di cattura dei mesoni. È facile anche convincersi che, non essendovi frenamento della primaria, $\mathcal{N}(0, z_c, \vartheta)$ non dipende dall'angolo ϑ . Indicando pertanto con

$$(19) \quad \mathcal{F}(z_c) = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{z_c} - \frac{2}{z_c^3} (1 + z_c) \exp[-z_c] \right\},$$

il valore costante di $\mathcal{N}(0, z_c, \vartheta)$, ottenuto considerando il caso più semplice $\vartheta = 0^\circ$, la sezione d'urto differenziale per fotoproduzione di mesoni, a parte il solito fattore statistico, si scriverà

$$(20) \quad \sigma(E, \vartheta) = A \sigma_0(E, \vartheta) \mathcal{F}(z_c),$$

avendo qui la $\sigma_0(E, \vartheta)$ per i fotoni un significato analogo a quello che la stessa funzione aveva nella (15) per i nucleoni. La $\sigma_0(E, \vartheta)$ si deve pensare cioè ottenuta mediando la sezione d'urto elementare di fotoproduzione sulla sfera di Fermi ⁽¹⁶⁾.

La (20) ci dice intanto che il rapporto fra la $\sigma(E, \vartheta)/A$ e la $\sigma_0(E, \vartheta)$ è indipendente dall'angolo ϑ : di qui segue che la sezione d'urto sperimentale $\sigma(E, \vartheta)$ dà direttamente informazioni sulla distribuzione dei momenti nella sfera di Fermi, mentre il valore del rapporto fissa, tramite la (19), il valore del cammino libero medio λ_c di cattura dei mesoni. La curva superiore della fig. 3 dà l'andamento della funzione $\mathcal{F}(z)$, di cui in tab. I sono dati i valori per $1 \leq z \leq 6$.

Fra le esperienze di fotoproduzione di mesoni su nuclei, la più completa ci è sembrata quella di LITTAUER e WALKER ⁽¹⁷⁾, ed i valori sperimentali riportati in fig. 7 sono relativi alla somma dei mesoni positivi e negativi di energia 65 ± 15 MeV e per $\vartheta = 135^\circ$, ottenuti usando lo spettro di frenamento di un sinclotron di 310 MeV. La normalizzazione scelta corrisponde a produzione unitaria per l'idrogeno. Nella stessa figura è data anche la fun-

⁽¹⁶⁾ M. LAX e H. FESHBACH: *Phys. Rev.*, **81**, 189 (1951).

⁽¹⁷⁾ R. M. LITTAUER e D. WALKER: *Phys. Rev.*, **86**, 838 (1952).

zione $A\mathcal{F}(z_c)$ per i tre valori $\lambda_c = r_0$, $2r_0$, $3r_0$, e, sempre nella stessa normalizzazione dei dati sperimentali, il risultato pubblicato recentemente da BUTLER⁽¹⁸⁾, ed ottenuto limitando la fotoproduzione ai soli nucleoni di superficie, nell'ipotesi che la quasi totalità dei mesoni prodotti nell'interno del nucleo non possano sfuggire al processo di cattura. La figura mostra chiaramente come il modello ottico preveda, per mesoni di energia intorno ai 65 MeV, un valore di λ_c senz'altro compreso nell'intervallo $2r_0 \div 3r_0$, confermando le conclusioni suggerite dall'esame delle esperienze di scattering. È naturale inoltre che la curva di Butler cada fra le curve relative ai valori $\lambda_c = r_0$ e $\lambda_c = 2r_0$, in quanto i nucleoni di superficie sono distribuiti su una fascia di spessore dell'ordine di r_0 . Notiamo che la curva di Butler non è altro che la curva $A^{2/3}$, ed è conseguenza necessaria delle ipotesi di partenza. A nostro avviso, i risultati sperimentali non sono compatibili con una produzione limitata alla sola superficie, ma è essenziale tener conto del contributo dell'interno del nucleo. È appunto tale contributo che, crescendo percentualmente col numero atomico, conferisce alle curve di fotoproduzione, per opportuni valori di λ_c , una pendenza più ripida che non $A^{2/3}$, in accordo con l'andamento sperimentale.

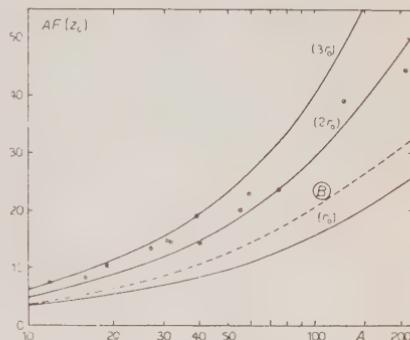


Fig. 7. – Andamento in funzione del numero atomico della sezione d'urto per produzione di mesoni da parte di fotoni per $\lambda_0 = r_0$, $2r_0$ e $3r_0$. I dati sperimentali si riferiscono alla somma dei mesoni positivi e negativi di 65 ± 15 MeV osservati per $\theta = 135^\circ$. La curva (B) è quella calcolata da BUTLER.

(18) S. T. BUTLER: *Phys. Rev.*, **87**, 1117 (1952).

SUMMARY

Various phenomena, connected with the absorption, scattering and production of π mesons in nuclear matter, have been investigated using an optical model for the nucleus. With the existing experimental data it is possible to establish that up to about 100 MeV the predominant process is the absorption, while for energies above

this value scattering predominates. In the production of mesons in nuclei by protons, account has been taken of the energy loss due to the elastic collisions of protons, which is particularly important near the threshold of production. In this way we are able to explain the observed saturation in the forward production cross-section. The optical model gives an $A^{2/3}$ -dependence for the backward production cross-section. In the photoproduction, the absorption of mesons does not alter the angular dependence of the differential cross-section in nuclear matter, and the yield of charged mesons increases more rapidly than the $A^{2/3}$ -law, if an absorption mean free path of the order of $2r_0$ is assumed ($R = r_0 A^{1/3}$). For mesons of about 60 MeV, our results are consistent with the experimental data if we choose an absorption mean free path between $2r_0$ and $3r_0$.

Produzione di mesoni in materiali condensati diversi.

A. BONETTI (*)

Istituto di Fisica dell'Università - Genova

N. DALLAPORTA e M. MERLIN

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

G. DASCOLA

Istituto di Fisica dell'Università - Parma

(ricevuto il 2 Gennaio 1953)

Riassunto. — Lastre G5 Ilford da 400μ di spessore sono state esposte a 2 000 metri s.l.m. tra blocchi di zolfo, stagno e piombo; per confronto sono state pure esposte altre lastre in aria. Sono stati osservati tutti gli eventi $\pi\mu$ e le stelle di σ per studiare la generazione di mesoni π nei vari materiali. Dalla discussione dei dati si sono ottenuti i seguenti rapporti per le sezioni d'urto di produzione: $\sigma_S : \sigma_{Sn} : \sigma_{Pb} = 1 : 0,9 \pm 0,3 : 0,5 \pm 0,25$. Questo andamento risulta diverso da quello ottenuto nelle esperienze di ciclotrone e sembra indicare che il meccanismo di produzione sia differente per le maggiori energie in gioco nella nostra esperienza. In particolare, per interpretare la decrescenza della sezione d'urto col crescere del peso atomico, viene proposto, sulla base dei risultati di una discussione riguardante le sezioni d'urto elementari di assorbimento e di scattering dei mesoni finora conosciute, un modello che considera come fenomeno dominante lo scattering plurimo dei mesoni nei nuclei. In base a questo modello le perdite d'energia e la probabilità di assorbimento dei mesoni crescono abbastanza rapidamente al crescere del raggio nucleare per compensare l'aumento della produzione dei mesoni col crescere del numero dei nucleoni nell'urto primario nucleone-nucleone.

(*) Attualmente presso l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Milano.

Introduzione.

La produzione di mesoni π in materiali condensati di diverso numero atomico, esposti alla radiazione cosmica è stata oggetto di una ricerca di DALLAPORTA, MERLIN, PIERUCCI e ROSTAGNI⁽¹⁾ mediante la tecnica delle lastre nucleari. In codesto lavoro è stato determinato il coefficiente di produzione relativo di questi mesoni in Alluminio ed in Piombo, col risultato che a parità di volume dei materiali condensati, la produzione in Alluminio, è nettamente superiore a quella in Piombo; tenuto conto della disposizione geometrica ciò porta ad ammettere che le sezioni d'urto di produzione siano circa uguali nei due materiali considerati. Questo risultato appare a prima vista in contrasto, sia coi dati relativi alla produzione di mesoni π di bassa energia da parte di fotoni o di protoni da ciclotrone, sia colle teorie fenomenologiche elaborate per interpretare tali dati.

Esso ci è parso perciò abbastanza interessante da meritare di essere approfondito attraverso un'altra serie di misure estese anche ad altri materiali. Nel medesimo tempo abbiamo tentato pure di darne una giustificazione teorica in relazione con quanto si sa dell'andamento effettivo della produzione di mesoni in un nucleo sotto l'azione della componente nucleonica della radiazione cosmica.

Tale duplice scopo si prefigge il presente lavoro; nella prima parte di esso, viene descritta una nuova serie di misure compiuta mediante lastre Ilford G5 di 400 micron di spessore, $10 \times 10 \text{ cm}^2$, esposte alla quota di 2 000 metri, (Passo Fedaia), per 25 giorni, tra blocchi di zolfo, stagno e piombo, e vengono esposti i risultati così ottenuti; nella seconda parte, i dati disponibili vengono discussi secondo un modello che, allo stato attuale delle nostre conoscenze sul mesone π ci sembra adatto ad interpretarli nelle grandi linee.

Disposizione sperimentale.

Le lastre verticali erano poste secondo lo schema della fig. 1, tra due blocchi di assorbitori

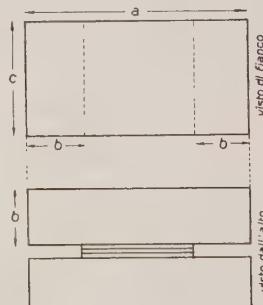


Fig. 1.

⁽¹⁾ N. DALLAPORTA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **9**, 202 (1952), citato in seguito come I.

le cui dimensioni sono indicate nella tabella seguente.

TABELLA I.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Zolfo	36,5 cm	13 cm	10 cm
Stagno	24 »	7 »	10 »
Piombo	20 »	5 »	10 »

Le dimensioni *a* e *b* dei vari assorbitori sono state scelte in modo che le perdite di energia per frenamento dei mesoni risultino approssimativamente equivalenti. Oltre alle lastre messe tra gli assorbitori, vi erano inoltre, per confronto, lastre sospese verticalmente lontane da materiali condensati.

TABELLA II. — *Numero dei mesoni nelle lastre.*

Vol. espl. (cm ³)	Numeri osservati			mesoni π^-	$\pi^- + \pi^+$	$\sigma = \frac{\pi^- + \pi^+}{\text{cm}^3 \text{ giorno}}$	
	mesoni ϱ	mesoni σ	$\pi \rightarrow \mu$				
Aria	8,83	$870 \pm 29,5$	$65 \pm 8,1$	$35 \pm 5,9$	61 ± 10	$96 \pm 11,2$	$0,44 \pm 0,05$
S	8,96	$992 \pm 31,6$	$127 \pm 11,5$	$48 \pm 6,9$	142 ± 13	190 ± 15	$0,85 \pm 0,07$
Sn	8,80	958 ± 31	$118 \pm 10,6$	$37 \pm 6,1$	131 ± 13	$168 \pm 14,6$	$0,77 \pm 0,07$
Pb	9,72	$924 \pm 30,5$	$88 \pm 9,3$	$39 \pm 6,3$	91 ± 11	$130 \pm 12,9$	$0,60 \pm 0,06$

L'esplorazione ha fornito i dati contenuti nelle prime 4 colonne della tab. II e nella 1^a riga della tab. III.

Il numero dei mesoni π^- nella tab. II e le percentuali dell'ultima riga della tab. III sono stati corretti in modo da tener conto del fatto che il 2,5% dei

TABELLA III. — *Distribuzione delle stelle di σ in funzione del numero di rami.*

Rami	1	2	3	4	5	6	Totale
Numero totale di stelle	239	82	49	23	4	1	398
Valori percentuali corretti	48,4	26,5	16	7,5	1,3	0,3	100

mesoni μ produce stelle di disintegrazione confondibili con quelle prodotte dai π e che il 27% dei π non produce disintegrazioni visibili. In definitiva il numero totale dei mesoni π in valore assoluto e riferito a cm^3 e giorno è dato nelle ultime due colonne della tab. II.

Discussione dei dati osservati.

Si devono ora elaborare tali dati per risalire ai coefficienti di produzione dei mesoni nei diversi materiali. Il numero totale dei mesoni prodotti nel materiale condensato e morenti in un elemento dv della lastra, tenendo conto solamente del frenamento per range e del cammino di assorbimento dei mesoni nel materiale, è dato dalla relazione ⁽²⁾:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T dv = dv \cdot F(E) \iint \frac{\tau(\theta) \sin \theta}{4\pi} d\theta d\varphi, \\ \text{dove } E = k \cdot R^m \text{ e } F(E) = m \cdot k \int \exp [-\alpha z] S(E) \cdot \exp \left[-\frac{R}{\lambda} \right] R^{m-1} \cdot dR, \end{array} \right.$$

dove $\tau(\theta)$ è la funzione di distribuzione angolare dei mesoni emessi, assunta isotropa per le basse energie che qui interessano;

$S(E)$ è il loro spettro di produzione, per il quale si è assunta la forma:

$$S(E) = \frac{1000 \cdot B}{E^{3/2}} \quad \text{per} \quad E > E_i \cong 100 \text{ MeV}$$

$$S(E) = B \quad \text{per} \quad E < E_i \approx 100 \text{ MeV},$$

α è l'inverso del cammino di assorbimento della nucleonica;

λ è il cammino di assorbimento dei mesoni;

m ed k sono le costanti della relazione range-energia.

Per ottenere i numeri T occorre anzitutto correggere i dati della tab. II dai mesoni T_0 di fondo. Tali mesoni sono presumibilmente dovuti in massima parte a generazione locale nel tetto, nelle pareti e nel pavimento dell'ambiente. La complessità di tali condizioni esclude di poter prevedere l'andamento dello spettro energetico di tali mesoni. Quando la lastra viene posta sotto un materiale condensato, l'effetto di questo è di far slittare questo spettro verso le basse energie. Assumere direttamente come fondo i mesoni osservati nelle

(2) N. DALLAPORTA e M. MERLIN: *Nuovo Cimento*, 7, 963 (1950).

lastre in aria significa ammettere, prescindendo dall'assorbimento non molto cospicuo nel materiale, che per tutto l'intervallo energetico di slittamento (circa 100 MeV per materiali pesanti) lo spettro di tali mesoni non vari sensibilmente di intensità. Ciò può apparire abbastanza plausibile in base a quanto sappiamo sullo spettro di produzione dei mesoni di bassa energia nelle lastre, e costituiscce l'unica taratura praticamente eseguibile allo stato attuale.

Occorre però tener presente che in queste considerazioni non si è tenuto conto né delle possibili deviazioni angolari dei mesoni per scattering coulombiani singoli, né della produzione secondaria per scattering anelastici.

Ci sembra che il primo di tali fenomeni, più cospicuo nei materiali pesanti, debba avere un effetto trascurabile nelle speciali condizioni geometriche della nostra esperienza in base alle seguenti considerazioni: in quanto nella lastra teniamo conto soltanto dei mesoni che vi muoiono ed in quanto lo scattering singolo ha solo importanza per mesoni a fine range, è ovvio che tale fenomeno interesserà prevalentemente un piccolo strato del materiale in contatto con la lastra. Prescindendo da esatte considerazioni geometriche di compenso angolare tra i vari mesoni, e tenendo conto solo degli scattering all'indietro, potremo schematizzare il fenomeno considerando tali strati superficiali dei blocchi come semi-riflettenti. Come si vede dalla fig. 2 tale riflessione nello strato *A* del mesone *a* proveniente dallo strato *A'* sarà compensata dalla riflessione nello strato *B* del mesone *b* di ugual energia proveniente dallo strato *B'*. È facile verificare che le sole zone dei blocchi senza possibilità di compenso sono quelle immediatamente vicine alle lastre e che il loro contributo di fronte alla massa totale è trascurabile.

Il secondo fenomeno invece può portare ad una correzione non indifferente trattandosi di un effetto integrale, poichè, come discuteremo in seguito, la sezione d'urto di scattering dei mesoni non sembra diminuire col crescere dell'energia. Tale effetto dovrebbe essere soprattutto apprezzabile per i materiali leggeri: ciò risulta sia dai dati esistenti sullo scattering anelastico nel carbonio (³) e nelle lastre (⁴), sia dalle considerazioni che svolgeremo in seguito, che portano a ritenere che lo scattering anelastico dei mesoni sia una funzione decrescente del peso atomico (almeno percentualmente rispetto allo scattering totale). Di tale fenomeno si può tenere grossolanamente conto nel modo se-

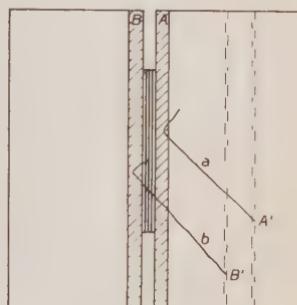


Fig. 2.

(³) H. BYFIELD, Y. KESSLER e L. M. LEDERMANN: *Phys. Rev.*, **86**, 17 (1952).

(⁴) G. BERNARDINI, T. BOOTH e L. LEDERMANN: *Phys. Rev.*, **83**, 1075 (1951).

guente: il flusso dei mesoni diffusi anelasticamente in modo secondario e che vengono a morire in un punto della lastra sarà approssimativamente dato da

$$\frac{\Omega}{4\pi} \cdot n \cdot \sigma_{an} \cdot l \cdot J \cdot q ,$$

dove Ω è l'angolo solido di provenienza dei mesoni, n il numero di centri del materiale per cm^3 , σ_{an} la sezione d'urto per scattering anelastico, l lo spessore medio del materiale, q la percentuale di mesoni diffusi con l'energia necessaria per morire nel punto considerato della lastra e J lo spettro integrale dei mesoni primari. In tal modo il flusso dei mesoni di fondo T_0 e dei mesoni T generati nel materiale saranno incrementati nel rapporto $(1 + r)$ dove

$$r = \frac{\Omega}{4\pi} \cdot q \cdot n \cdot \sigma_{an} \cdot l \cdot \left[(E_i - E_m) + \frac{2000}{\sqrt{E_i}} \right] .$$

E_m è l'energia media minima dei mesoni che generano un secondario capace di giungere alla lastra. I valori di r così valutati sono contenuti nella tab. IV; per il Pb si è assunto $r = 0$.

Indicando con S il numero totale dei mesoni osservati (tab. II) avremo

$$(2) \quad S = T_0(1 + r) + T(1 + r) ,$$

dalla quale possiamo ricavare T .

Il calcolo è stato eseguito per il punto centrale della lastra assumendo per i parametri che compaiono nelle (1) i seguenti valori:

TABELLA IV.

	α in cm^2/g	k	m	λ in g/cm^2	r
S	$\frac{1}{200}$	10,9	0,6	60	0,15
Sn	$\frac{1}{260}$	9,1	0,6	90	0,07
Pb	$\frac{1}{300}$	8,3	0,6	110	0

In tal modo si è ottenuto

$$(3) \quad \begin{cases} T_S = 43,6 B_S , \\ T_{Sn} = 50 B_{Sn} , \\ T_{Pb} = 53 B_{Pb} . \end{cases}$$

Per cui i coefficienti di produzione mediante le (2) e (3) risultano proporzionali a

$$B_S \sim 0,0069 ,$$

$$B_{Sn} \sim 0,0056 ,$$

$$B_{Pb} \sim 0,0030 ,$$

e le sezioni d'urto

$$\frac{\sigma_{Pb}}{\sigma_S} = \frac{B_{Pb}}{B_S} \cdot \frac{N_S}{N_{Pb}} = 0,5 \pm 0,25$$

$$\frac{\sigma_{Sn}}{\sigma_S} = \frac{B_{Sn}}{B_S} \cdot \frac{N_S}{N_{Sn}} = 0,9 \pm 0,3 .$$

Nel lavoro I si era trovato

$$\frac{\sigma_{Al}}{\sigma_{Pb}} = 1 \pm 0,4 .$$

tal dato benchè alquanto discordante da quello relativo allo zolfo è tuttavia compatibile cogli errori. Complessivamente i dati attualmente disponibili risultano dalla tabella V.

TABELLA V. — *Sezioni d'urto relative per i vari materiali e rapporti di essi con $A^{2/3}$.*

	Al	S	Sn	Pb
σ	$0,5 \pm 0,25$	$1 \pm 0,2$	$0,9 \pm 0,3$	$0,5 \pm 0,25$
A	27	32	118	208
$A^{2/3}$	9	10,1	24,2	35,2
$\sigma/A^{2/3}$	0,055	0,1	0,037	0,014

Confronto con i dati delle esperienze di produzione artificiale.

I risultati da noi ottenuti relativi alla produzione di mesoni in stelle di raggi cosmici offrono un andamento qualitativamente alquanto diverso da quelli che si ottengono nelle esperienze con le grandi macchine.

Nei casi di fotoproduzione ⁽⁵⁾ con fotoni prodotti da elettroni di 300 MeV, le sezioni d'urto di produzione nei vari elementi vanno crescendo con una legge in $A^{2/3}$ che si mantiene valida con buona approssimazione dal Li al Pb. Nelle esperienze di produzione per urto di protoni di 340 e di 240 MeV ⁽⁶⁾, la relazione tra sezione d'urto e peso atomico è già meno semplice: la sezione d'urto, dopo una salita iniziale in $A^{2/3}$, raggiunge per elevati pesi atomici un valore che sembra mantenersi pressoché costante. Nel nostro caso infine, dopo una probabile salita iniziale, sembra vi sia addirittura una decrescenza della sezione d'urto con l'aumentare del numero di massa.

Il primo e più semplice di questi tre casi, quello cioè della fotoproduzione per basse energie, sembra abbastanza bene interpretabile mediante la teoria proposta da SERBER, BRUCKNER e WATSON ⁽⁷⁾. La sezione di fotoproduzione elementare nell'urto fotone-nucleone essendo molto piccola (circa $5 \cdot 10^{-28}$), il nucleo risulta praticamente trasparente ai fotoni, sicché la sezione d'urto di produzione complessiva crescerà come A . Tenendo conto del riassorbimento dei mesoni nel nucleo, che cresce linearmente col raggio nucleare, il numero complessivo di mesoni uscenti dal nucleo andrà come $A^{2/3}$.

L'andamento diverso e più complesso dei dati sperimentali in tutti i casi di produzione per urto nucleonico lascia subito prevedere che tale semplice modello non possa risultare adatto in tale caso. Per tentare di rendersi conto dell'andamento del fenomeno complessivo, sembra conveniente analizzarlo nelle sue fasi elementari: 1) creazione di mesoni nell'urto del nucleone incidente contro un nucleone del nucleo; 2) comportamento dei mesoni creati nel nucleo. Per queste fasi possediamo informazioni dirette delle quali potremo giovarci.

Interazioni nei nucleoni del nucleo.

Già per un nucleone di 100 MeV la lunghezza d'onda di de Broglie è dell'ordine di $4 \cdot 10^{-14}$ cm, ragione per cui risulta lecito considerare che il nucleone incidente interagisca con uno solo dei nucleoni alla volta. Detta allora Σ la sezione totale d'interazione di due nucleoni e $A = 1/r\Sigma$, il cammino libero medio di un nucleone in materia nucleare (ν = numero di nucleoni per cm^3) la sezione d'urto S di un nucleo di raggio R , posto $x = R/A$, risulta in base

⁽⁵⁾ R. F. MOZLEY: *Phys. Rev.*, **80**, 493 (1950); A. S. BISHOP *et al.*: *Phys. Rev.*, **80**, 291 (1950); R. M. LITTAUER e D. WALKER: *Phys. Rev.*, **82**, 598 (1951).

⁽⁶⁾ D. CLARK: *Phys. Rev.*, **81**, 313 (1951); D. HAMLIN, M. JACOBSEN, J. MERRITT e A. SCHULTZ: *Phys. Rev.*, **84**, 857 (1951).

⁽⁷⁾ K. E. BRUECKNER, R. SERBER e K. M. WATSON: *Phys. Rev.*, **84**, 258 (1951).

ad un calcolo geometrico elementare:

$$S = \pi R^2 y, \quad y = 1 - \frac{1}{2x^2} + \exp[-2x] \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right).$$

Per $A \rightarrow \infty$ questa formula si riduce alla sezione geometrica πR^2 , mentre per $A \rightarrow 0$ si ottiene $S \sim (4/3)\pi(R^3/\lambda)$ che corrisponde alla totale trasparenza del nucleo. $L = 1/nS$ definisce il cammino libero medio dei nucleoni in materia ordinaria, ed i dati sperimentali ad esso relativi ci possono fornire una induzione sul valore di A .

Nei riguardi del fenomeno della produzione dei mesoni, dovremo tener conto solo dei dati sperimentali relativi a nucleoni di energia sufficientemente elevata. Lascieremo quindi da parte i risultati ottenuti con nucleoni di ciclotroni (8), e considereremo soltanto quelli ottenuti per la nucleonica dei raggi cosmici. I dati di Bristol colle lastre (9) (nuclei di Ag e Br) sembrano indicare una sezione praticamente geometrica; i dati coi contatori che misurano l'assorbimento totale della nucleonica (10) danno nel caso di Pb un valore corrispondente alla sezione geometrica e nel caso di C un valore nettamente superiore (circa 80 g/cm²). Questi dati alquanto scarsi si possono confrontare con quelli della tab. VI che dà i valori di S in funzione di diversi valori del parametro A : l'accordo migliore di ottiene per $A = 2a_0$ ($a_0 = 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm).

TABELLA VI. — Cammini liberi medi per i nuclei C e Pb calcolati per vari valori di A .

	A	$R \cdot 10^{-13}$	L in g/cm ²			
			$A = 0$	$A = a_0$	$A = 2a_0$	$A = 3a_0$
C	12	3,21	61,5	67,5	81,5	99
Pb	207,2	8,3	159	161	168	178

La crescita della sezione d'urto di produzione in funzione di A non differisce quindi molto dalla crescita geometrica, ma è un po' più rapida e adotteremo per essa una legge in $\sim A^{3/4}$.

(8) J. DE JUREN: *Phys. Rev.*, **80**, 23 (1950); J. DE JUREN e B. J. MOYER: *Phys. Rev.*, **81**, 919 (1950); G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **85**, 826 (1952).

(9) U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

(10) G. COCCONI: *Phys. Rev.*, **75**, 1074 (1949); **76**, 989 (1949); W. D. WALKER, S. P. WALKER e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **80**, 546 (1950).

La differenza principale col caso di fotoproduzione per quanto riguarda questa prima fase sta quindi nel fatto che il nucleo non può considerarsi trasparente nei riguardi della primaria nucleonica generatrice dei mesoni.

Mesoni nel nucleo.

Una volta creati i mesoni, occorre vedere quale sia il loro comportamento nella materia nucleare nella quale si trovano immersi: essi potranno venire

TABELLA VII. - *Dati sperimentali di Bernardini sulle sezioni di assorbimento e di scattering dei mesoni nei nuclei di Ag Br.*

E in MeV	s assorb. $\cdot 10^{-24}$	s scatt. $\cdot 10^{-24}$	s totale $\cdot 10^{-24}$	s geom. $\cdot 10^{-24}$	σ assorb. $\cdot 10_0^{-26}$	σ scatt. $\cdot 10^{-26}$	λ scatt. $\cdot 10^{-13}$	λ assorb. $\cdot 10^{-13}$
30-50	0,62	0,25	0,87	1,37	0,41	0,28	27,8	40
60-90	0,76	0,29	1,05	1,16	0,79	1,45	14,4	8,9
100-110	0,75	0,41	1,16	1,07	0,94	>3,2	12,1	<3,5

s =sezione d'urto mesone-nucleo in materia ordinaria:

σ =sezione d'urto mesone-nucleone in materia nucleare:

λ =cammino libero medio del mesone in materia nucleare.

riassorbiti, oppure diffusi con o senza scambio di carica. In riguardo al primo di tali fenomeni, i dati più indicativi sono quelli di BERNARDINI e coll. (4) riassunti nella tab. VII e quelli di LOCK e YEKUTIELI (L. e Y.) (11) riassunti nella tab. VIII.

TABELLA VIII. - *Dati sperimentali di Lock e Yekutieli sulle sezioni relative di assorbimento e scattering dei mesoni nei nuclei di Ag Br.*

E in MeV	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	$\frac{s_{\text{assorb.}}}{s_{\text{totale}}}$	$\frac{s_{\text{scatt.}}}{s_{\text{totale}}}$	$\frac{s_{\text{scambio}}}{s_{\text{totale}}}$	$(1) + (3)$	$(2) + (3)$
0-160	0,36	0,26	0,38	0,74	0,64
160-800	0,03	0,4	0,57	0,6	0,97
800-1100	0	0,75	0,7	0,7	~ 1 (*)

(*) Si ottiene presumibilmente il valore ~ 1 sottraendo la produzione di mesoni secondari.

(11) W. O. LOCK e G. YEKUTIELI: *Phil. Mag.*, **43**, 231 (1952).

La notevole differenza tra le sezioni d'urto percentuali di riassorbimento dedotte dalle misure di questi autori deriva essenzialmente dal fatto che mentre i primi interpretano tutti gli eventi da loro osservati in termini solamente di riassorbimento e di scattering, i secondi oltre tali possibilità ammettono pure l'eventualità di scattering con scambio di carica: sicchè in effetti, ciò che viene denominato assorbimento da BERNARDINI corrisponde alla somma delle colonne (1) + (3) di L. e Y.; la sezione totale di scattering con o senza scambio di carica risulta invece dalla somma delle colonne (2) + (3) della tab. VIII. Non si deve però perdere di vista il fatto che i dati di L. e Y. relativi allo scattering con scambio di carica, sono ottenuti in base al difetto di energia nei bilanci energetici dei rami visibili delle stelle generate dai mesoni; considerazioni sempre soggette a notevoli incertezze; di conseguenza sembra lecito concludere sulla base dei dati di L. e Y. che lo scattering con scambio di carica sia importante per alte energie e quindi che la sezione d'assorbimento abbia un andamento effettivamente decrescente con l'energia; il che risulta anche intuitivamente dal fatto che un mesone per essere assorbito deve interagire con almeno due nucleoni e ciò sarà possibile solo se la sua lunghezza d'onda di de Broglie non sarà troppo piccola; allo stato attuale però non sembra possibile fondare su di essi delle considerazioni quantitative.

Per quanto invece riguarda lo scattering è presumibile che le sezioni d'urto date da BERNARDINI e da L. e Y. risultino molto inferiori al valore vero, per il fatto che essi interpretano i loro dati, sia per l'assorbimento che per lo scattering, come dovuti ad un singolo evento nell'interno del nucleo. Ora è ovvio che se la sezione d'urto di scattering è notevole, un mesone potrà essere diffuso più volte nell'interno del nucleo prima di uscirne o di rimanere assorbito. Se si potesse prescindere dai cambiamenti di direzione subiti dal mesone per effetto dello scattering si potrebbe facilmente calcolare le probabilità che ha un mesone di apparire diffuso o assorbito dopo 1, 2 ... n scattering nell'interno del nucleo. Basandosi sui dati di BERNARDINI i valori ottenuti mediante tale calcolo per le sezioni di assorbimento e di scattering ed i cammini liberi medi corrispondenti, sono riportati nelle ultime colonne della tab. VII e mostrano a titolo puramente indicativo come col crescere dell'energia la sezione d'urto di scattering debba raggiungere un valore prossimo a quello geometrico.

Questo alto valore della sezione di scattering è stato confermato dalle misure dirette sulla diffusione di mesoni π^- e π^+ su nuclei di idrogeno fatte da FERMI e coll. (12) che hanno mostrato come la sezione d'urto dei π^- tenda

(12) H. ANDERSON, E. FERMI, E. LONG, R. MARTIN e D. NAGLE: *Phys. Rev.*, **85**, 934 (1952); H. ANDERSON, E. FERMI, E. LONG e D. NAGLE: *Phys. Rev.*, **85**, 936 (1952); E. FERMI, H. ANDERSON, A. LUNDBY, D. NAGLE e G. B. YODH: *Phys. Rev.*, **85**, 935 (1952).

rapidamente al valore geometrico $\sim 60 \cdot 10^{-27}$ verso i 100 MeV, mentre quella dei π^+ diventa addirittura 2,5 volte quella geometrica per quel range di energie. Prescindendo ora da tale distinzione, di cui si potrà tenere conto solo in una teoria più raffinata, sembra lecito potere concludere che per energie dei mesoni sopra i 100 MeV, la sezione d'urto di scattering abbia in media per lo meno il valore geometrico, al quale corrisponde un c.l.m. in materia nucleare di $\lambda_s = 1,9 \cdot 10^{-13}$, piccolo rispetto alle dimensioni dei nuclei pesanti. Come abbiamo già detto in base all'analisi di L. e Y., per tali energie la probabilità di assorbimento è già trascurabile. Per energie invece più basse, la sezione di scattering cala rapidamente mentre cresce quella di assorbimento.

Crediamo che a questa diversità di comportamento delle sezioni d'urto siano da attribuire essenzialmente le differenze riscontrate tra le esperienze di ciclotrone e quelle di raggi cosmici. Nel primo caso i mesoni sono prodotti da un primario di bassa energia (~ 300 MeV) ed è essenziale per essi tenere conto dell'assorbimento, mentre in genere lo scattering ha una funzione meno importante e basta tutt'al più considerare lo scattering singolo; su tale linea CLEMENTEL e PUPPI (13) hanno tentato di dare un'interpretazione del fenomeno che sembra in accordo soddisfacente coi risultati sperimentali. Nel caso dei raggi cosmici invece i primari produttori di mesoni saranno in media di energia notevolmente più alta (alcuni GeV) e poichè allora il c.l.m. di scattering risulta piccolo rispetto alle dimensioni nucleari il fenomeno dominante è lo scattering plurimo nell'interno del nucleo.

Per quanto riguarda la distribuzione angolare dello scattering, i dati sperimentali diretti di FERMI e coll. (14), prescindendo sempre dalla distinzione tra mesoni di segno diverso, mostrano che in prima approssimazione si può assumere una distribuzione angolare isotropa nel sistema del baricentro. La trasformazione al sistema del laboratorio mostra che per energie non troppo elevate (sotto i 500 MeV circa) la isotropia si possa ritenere ancora grossolanamente conservata; mentre al di sopra di questo limite è conveniente considerare i mesoni prodotti tutti praticamente nella direzione del nucleone incidente.

Produzione dei mesoni nei nuclei.

Sulla base dei dati e delle ammissioni precedenti, si può tentare di interpretare il fenomeno di produzione dei mesoni nei nuclei per urto nucleonico primario, prescindendo per ora da ogni dettaglio relativo alle differenze di segno dei mesoni, nel modo che segue.

(13) E. CLEMENTEL e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, (in corso di stampa).

(14) E. FERMI, H. ANDERSON e D. NAGLE: 1952 (in corso di stampa).

I mesoni energici (sopra i 500 MeV circa) creati nel primo urto nel nucleo escono praticamente indeviati anche se diffusi più volte e per tale ragione saranno registrati solo in minima parte nel nostro dispositivo sperimentale. Invece quelli creati con energie non troppo elevate seguono una traiettoria sinuosa, composta da tanti segmenti dell'ordine di grandezza di λ_s orientati circa a caso l'uno rispetto all'altro. Ad ogni atto di scattering, essi perdono una parte della loro energia, e quindi tale perdita complessiva cresce colla lunghezza della traiettoria effettiva. D'altronde essi non corrono pericolo di venire assorbiti se non quando la loro energia diventa molto piccola. Ne segue che in genere verranno assorbiti soltanto i mesoni che hanno seguito una lunga traiettoria, e siccome è facile prevedere che la lunghezza media della traiettoria cresca rapidamente col crescere delle dimensioni del nucleo, si capisce come il riassorbimento debba essere una funzione molto sensibile delle dimensioni nucleari, e come per i nuclei molto pesanti esso possa essere sufficientemente alto per compensare l'aumento della sezione di produzione vera che cresce come $A^{3/4}$.

Riteniamo che un calcolo analitico basato sul precedente modello risulti estremamente complicato e difficile, e che l'unica via praticabile sia un metodo di Monte Carlo.

Per ora ci siamo accontentati di una grossolana valutazione dell'effetto da aspettarsi, che si ottiene facilmente se si prescinde da tutte le fluttuazioni e si ragiona solo sui valori medi.

Ammettiamo cioè che il percorso di tutti i mesoni creati nel nucleo sia uguale ad un certo valore medio b che dipende evidentemente in modo essenziale dalle dimensioni del nucleo. Ragionando anzitutto su un mesone prodotto nel centro c'è da attendersi che b risulti in primo luogo proporzionale alle dimensioni lineari del nucleo, indi proporzionale al numero di ostacoli che sviano il mesone dalla traiettoria rettilinea, e cioè al volume, infine inversamente proporzionale alle possibilità di uscita del mesone dal nucleo, cioè alla superficie: ciò conduce complessivamente ad una dipendenza di b da R^2 . Una valutazione diretta ottenuta mediante un metodo di Monte Carlo applicato ad un modello alquanto semplificato conferma tale previsione. Con lo stesso metodo si può verificare che quando il mesone non è prodotto nel centro, il percorso medio diventa sempre minore via via che il punto di origine si avvicina alla superficie. Ora, siccome secondo l'ipotesi sulla produzione i mesoni vengono praticamente generati in uno strato parallelo alla superficie di ingresso di spessore pari al c.l.m. della nucleonica in materia nucleare, è facile vedere che per nuclei piccoli come S il massimo numero di mesoni è generato vicino al centro, mentre per nuclei grandi come il Pb è in massima parte generato vicino alla superficie. Ciò conduce ad una crescita meno rapida di b in funzione di R che, in base alle nostre valutazioni approssimate, abbiamo assunta del tipo $b \sim R^{1.6}$ e che per i nuclei studiati conduce ai valori della tab. IX. Detto

$m = b/\lambda_s$ il valore del numero medio di urti del mesone e conoscendo la sua energia iniziale si può calcolare coll'aiuto delle sezioni d'urto sperimentali di Fermi il valore medio della sua energia dopo 1, 2 ... n scattering.

Date le attuali incertezze sull'andamento esatto della sezione di assorbimento, l'effetto di questo si può approssimare in modo alquanto drastico con un taglio ad una certa energia η , in modo tale che i mesoni che dopo n scattering si sono ridotti ad energia minore di η si considerano assorbiti, e quelli con energia maggiore di η uscenti dal nucleo. Se allora indichiamo con $f(E') \cdot dE'$ lo spettro differenziale di produzione dei mesoni nell'interno del nucleo, ne segue che il numero di mesoni uscenti è proporzionale a:

$$F(E) = \int_E^\infty f(E') \cdot dE' ,$$

dove E è quella tale energia iniziale del mesone che dopo n urti si riduce al valore η .

Complessivamente la produzione di mesoni effettivamente uscenti viene a dipendere da una legge del tipo

$$P \sim A^{3/4} \cdot F(E) .$$

Tale numero risulta quindi essenzialmente dipendente dall'andamento dello spettro integrale $F(E)$ di produzione e dall'energia di taglio che condiziona il valore di E . Poichè E cresce con A , $F(E)$ sarà comunque una funzione sempre decrescente di A . Le incertezze che ancora attualmente regnano su tali dati permetteranno ovviamente di ritrovare i dati sperimentali con valori opportuni di $F(E)$ e del taglio. Assumendo per la $F(E)$ l'andamento recentemente proposto da BUDINI e MOLIÈRE (15):

$$F(E) \sim \log^{2.3} \left(\frac{E_0}{E} \right)$$

(E_0 = energia del primario ~ 5 GeV) e per il taglio di assorbimento $\eta = 20$ MeV; si ottengono per le sezioni d'urto di produzione i seguenti rapporti:

$$\text{S : Sn : Pb} = 1 : 1 : 0.4 ,$$

abbastanza in accordo con i nostri risultati.

(15) P. BUDINI e G. MOLIÈRE: *Höhenstrahlung* (Göttingen, 1953).

TABELLA IX. — *Numero medio di urti del mesone nel nucleo.*

	Nell'ipotesi di traiettoria rettilinea	Nell'ipotesi di traiettoria sinuosa
S	2,1	4
Sn	3,3	8,6
Pb	3,9	11,7

In conclusione, possiamo dire che lo schema qui proposto si può prestare ad interpretare la produzione dei mesoni uscenti dai nuclei, senza che sia possibile per ora esprimere un vero criterio di giudizio in merito per la mancanza di alcuni dati sperimentali indispensabili.

Ringraziamo il prof. G. OCCHIALINI e il prof. G. PUPPI per alcune utili discussioni su vari punti del lavoro; il prof. A. ROSTAGNI e il prof. G. TODESCO per l'interesse col quale lo hanno seguito; i microscopisti degli Istituti di Genova, Padova e Parma per il valido aiuto prestato nell'osservazione delle lastre.

S U M M A R Y

Ilford G5 plates, 400μ thick, have been exposed at 2000 m.s.l., between Sulphur, Tin and Lead blocks: other plates have also been exposed in air for comparison. All the $\pi\cdot\mu$ events and σ -stars have been observed, in order to investigate the production of π -mesons in different materials. From the experimental results, the following ratios for the production cross sections have been obtained: $\sigma_S\sigma_{Sn}:\sigma_{Pb} = 1:0,9 \pm 3:0,5 \pm 0,25$. This behaviour of the production cross section as a function of the mass number is different from the one observed in cyclotron experiments, and is likely to indicate that in our case the production follows a different mechanism, owing to the greater energies which are involved. In order to explain the decrease of the cross section with increasing mass number, the values presently known of the partial cross sections for meson absorption and scattering are discussed and a model is proposed, which considers the plural scattering of mesons in nuclear matter as a preminent phenomenon. Following this model, the energy losses and absorption probabilities of the mesons in the interior of the nuclei increase rather quickly with the increase of the nuclear radius, and compensate the increase of the production of mesons with the increase of the number of nucleons, in the primary nucleon-nucleon collision.

A Unified Field Theory of Gravitation and Electromagnetism.

G. STEPHENSON

Department of Physics, University College - London

C. W. KILMISTER

Department of Mathematics, King's College - London

(ricevuto il 4 Gennaio 1953)

Summary. — A unified field theory of gravitation and electromagnetism is developed from the metrical properties of a non-Riemannian space-time structure S_4 . The equations of the geodesics in S_4 are non-minimal curves in a Riemannian space R_4 and are identical with the relativistic equations of motion of a test particle moving in a gravitational and electromagnetic field. The Gaussian curvature of the geodesic surfaces is discussed and the scalar which arises is used to form a Lagrangian, from which the field equations are derived. These field equations are the usual Einstein gravitational equations and Maxwell electromagnetic equations, together with interaction terms, and imply equations of motion which are consistent with those obtained from the geodesic equations. The affine properties of the non-Riemannian space are briefly discussed.

1. — Introduction.

The recent generalized theory of gravitation and electromagnetism developed by EINSTEIN⁽¹⁾ and EINSTEIN and STRAUS⁽²⁾ is mathematically attractive and represents the most natural generalization of the General Theory of Relativity. It has been shown by INFELD⁽³⁾, however, that a serious diffi-

(¹) A. EINSTEIN: *Ann. Math.*, **46**, 578 (1945); *The Meaning of Relativity* (London, 1950), Appendix 2.

(²) A. EINSTEIN and E. G. STRAUS: *Ann. Math.*, **47**, 731 (1946).

(³) L. INFELD: *Nature*, **166**, 1075 (1950); *Act. Phys. Pol.*, **10**, 284 (1951).

culty exists in the theory in connection with the equations of motion. In a series of papers by EINSTEIN and others (4) and INFELD (5), the equations of motion of a test particle in General Relativity have been shown to be completely specified by the field equations and to be identical with the equations of the geodesics in the Riemannian space. Following the same procedure in the generalized theory, however, INFELD has shown that the equations of motion do not contain any terms representing the interaction of a charged test particle with an electromagnetic field; the same result has been shown to be true by IKEDA (6) for the purely affine theory developed by SCHRÖDINGER (7). In view of this difficulty, it is natural to question whether generalizing the metric tensors g_{mn} to a non-symmetric form is the correct method for the introduction of the electromagnetic field.

In this paper a different generalization is considered which overcomes the difficulty mentioned above. Moreover, this generalization is based directly on the metrical properties of the continuum in keeping with the basic ideas of General Relativity.

The space-time metric of General Relativity $ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n$ ($m, n = 1, 2, 3, 4$), which is homogeneous in dx^m and represents a hypersphere in the Riemannian space R_4 , can be regarded as a special case of a more general metric, homogeneous in both dx^m and ds , of the form

$$(1) \quad ds^2 + 2A_m dx^m ds - (g_{mn} - A_m A_n) dx^m dx^n = 0,$$

where A_m is a four-vector and g_{mn} is a symmetric tensor.

The theory discussed here is based on this metric, A_m being associated with the electromagnetic four-potential. The gravitational and electromagnetic field equations with interaction terms follow from this generalization, but it appears difficult to extend the theory to include a scalar or pseudoscalar field variable representing the meson field.

2. – The Geodesics.

The metric (1) may be written as

$$(2) \quad ds = -A_m dx^m \pm \sqrt{g_{mn} dx^m dx^n},$$

(4) A. EINSTEIN *et al.*: *Ann. Math.*, **39**, 66 (1938); **41**, 797 (1940); *Can. Journ. of Math.*, **1**, 209 (1949).

(5) L. INFELD: *Phys. Rev.*, **53**, 836 (1938).

(6) M. IKEDA: *Prog. Theor. Phys.*, **7**, 127 (1952).

(7) E. SCHRÖDINGER: *Proc. Roy. Irish Acad.*, **51**, 163, 205 (1947); **52**, 1 (1948).

where the ambiguous sign may be settled by the requirement of continuity, provided we do not pass through a zero of $dw^2 = g_{mn} dx^m dx^n$.

The equations of the geodesics in the space-time described by the metric (2) (hereafter referred to as S_4) are obtained from the condition

$$(3) \quad \delta \int ds = 0,$$

and, after an elementary calculation, are found to be

$$(4) \quad \frac{d^2x^i}{dw^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ mn \end{matrix} \right\} \frac{dx^m}{dw} \cdot \frac{dx^n}{dw} + g^{ip} F_{np} \frac{dx^n}{dw} = 0,$$

where

$$F_{np} = \frac{\partial A_n}{\partial x^p} - \frac{\partial A_p}{\partial x^n}.$$

These minimal curves in S_4 represent non-minimal curves in a Riemannian space R_4 with metric $dw^2 + g_{mn} dx^m dx^n$, and are identical with the relativistic equations of motion of a test particle interacting with a gravitational and electromagnetic field provided the electromagnetic four-potential is taken as $m_0 c^2 A_m / e$. In the absence of an irreducible gravitational field, the Christoffel bracket vanishes and the equation reduces to the Lorentz equation of motion for a charged particle interacting with an electromagnetic field.

3. – Scalar Curvature.

The equations (4) define the paths of test particles in terms of the field variables which must now be determined by a set of field equations. One procedure in General Relativity is to employ a variational principle to determine these equations and to adopt as a Lagrangian density $R\sqrt{-g}$, where R is the scalar curvature of space and g is the determinant of the g_{mn} . The significance of this procedure is as follows: a set of four perpendicular directions at a point determines six geodesic surfaces and the mean of their Gaussian curvatures is independent of the directions chosen and is proportional to the scalar curvature R ⁽⁸⁾.

Near the origin, a solution of (4) may be written as

$$(5) \quad x^i = wt^i - \frac{1}{2} F_{ij} t^j w^2 + O(w^3),$$

(8) See L. P. EISENHART: *Riemannian Geometry* (Princeton, 1926), §§ 25, 26.

where we have taken geodesic coordinates with the origin as pole, and t^i is a unit tangent at the origin. The equation of the geodesic surface defined by two perpendiculars p^i , q^i is therefore of the form (5) with

$$(6) \quad t^i = p^i \cos \theta + q^i \sin \theta.$$

However, the Gaussian curvature of this surface at the origin is no longer determinate, the origin being a singular point. At a point corresponding to (w, θ) near the origin, the curvature is found to be ⁽⁹⁾

$$(7) \quad R_{ijk\ell} p^i q^j p^k q^\ell - \frac{1}{4} (A \cos^2 \theta - 2H \cos \theta \sin \theta + B \sin^2 \theta) + 0(w),$$

where

$$(8) \quad \begin{cases} A = c_{32}^2 + c_{42}^2 - 2(c_{31}^2 + c_{41}^2), \\ B = c_{31}^2 + c_{41}^2 - 2(c_{32}^2 + c_{42}^2), \\ H = 3c_{31}c_{32}, \end{cases}$$

and

$$(9) \quad c_{31} = F_{ij} r^i p^j, \quad c_{32} = F_{ij} r^i q^j, \quad c_{41} = F_{ij} s^i p^j, \quad c_{42} = F_{ij} s^i q^j$$

and r^i , s^i are a pair of perpendiculars to p^i , q^i .

If we define the principal value of the curvature to be the mean of the greatest and least values, we obtain the value

$$(10) \quad R_{ijk\ell} p^i q^j p^k q^\ell + \frac{1}{8} (c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{41}^2 + c_{42}^2).$$

From (10) it follows that the average principal value of the curvatures at the origin for the six surfaces determined by p^i , q^i , r^i , s^i is the scalar quantity

$$(11) \quad \frac{1}{12} \left(R + \frac{1}{2} F_{mn} F^{mn} \right).$$

4. – The Field Equations.

The discussion in § 3 suggests the adoption of a Lagrangian of the form

$$(12) \quad L = \int \left(R + \frac{1}{2} F_{mn} F^{mn} \right) \sqrt{-g} d\tau.$$

⁽⁹⁾ From L. P. EISENHART: *Riemannian Geometry* (Princeton, 1926), § 47.

This Lagrangian leads to the well-known field equations

$$(13) \quad \left(R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R \right) + \left(F_{em} F_{pn} g^{sp} - \frac{1}{4} g_{mn} F_{sp} F^{sp} \right) = 0 ,$$

and

$$(14) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^n} (F^{mn} \sqrt{-g}) = 0 .$$

Equations (13) are the Einstein gravitational equations, together with the electromagnetic energy-momentum tensor, whilst equations (14) correspond to one set of Maxwell's equations.

The problem of the equations of motion implied by these field equations has been considered by INFELD and WALLACE (10) and the paths of test particles defined by a specified limiting process are found to be identical with those given by (4).

This justifies the formation of a Lagrangian from the curvature scalar (11). The second set of Maxwell's equations are satisfied identically in virtue of the existence of the four-potential A_m .

5. – Discussion.

We have shown in this paper that it is possible to develop a unified field theory of gravitation and electromagnetism from the metrical properties of the continuum without introducing an affine connection.

It may be noted, however, that the requirement of no change in length in parallel displacement of an arbitrary vector in S_4 leads to the equations $A_{m;k} = 0$, $g_{mn;k} = 0$ in terms of a general non-symmetric connection. These equations imply the relation $A_m A^m = \text{constant}$, which has recently been postulated by DIRAC (11) in his new classical theory of electromagnetism. It is clear, however, that it is not possible to uniquely determine the affine connection (64 components) by the 56 equations $A_{m;k} = 0$, $g_{mn;k} = 0$, and we accordingly prefer the present theory based on the metrical approach.

We are grateful to Professor SCHRÖDINGER for a written discussion of the earlier form of this paper.

(10) L. INFELD and P. R. WALLACE: *Phys. Rev.*, **57**, 797 (1940).

(11) P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc., A*, **209**, 291 (1951).

RIASSUNTO (*)

Dalle proprietà metriche di una struttura spazio-temporale S_4 non riemanniana si sviluppa una teoria unificata dei campi gravitazionale ed elettromagnetico. Le equazioni delle geodetiche in S_4 sono curve non minimali in uno spazio riemanniano R_4 e sono identiche con le equazioni relativistiche del moto di una particella di prova moventesi in un campo gravitazionale ed elettromagnetico. Si discute la curvatura gaussiana delle superficie geodetiche, e lo scalare che ne deriva si impiega a formare un lagrangiano dal quale si derivano le equazioni del campo. Queste equazioni sono le consuete equazioni gravitazionali di Einstein e le equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell con dei termini di interazione e coinvolgono equazioni di moto compatibili con quelle ottenute dalle equazioni delle geodetiche. Si discutono brevemente le proprietà affini dello spazio non riemanniano.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

On the Energy Lost by a Relativistic Ionizing Particle in a Material Medium and on the Cerenkov Radiation.

P. BUDINI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

(ricevuto il 5 Gennaio 1953)

Summary. — The problem of the energy lost by a relativistic ionizing particle in a polarizable material medium is studied by considering separately the energy dissipated in proximity of the track of the ionizing particle, and that which is sent at a larger distance as radiation (Cerenkov radiation). A general formula is stated (Eq. (30)), which allows the calculation of the energy locally dissipated (valid for impact parameters larger than atomic dimensions) whatever may be the mechanism of the dissipation process. On the lines of the Fermi theory the problem of the energy locally dissipated in excitation of the atoms of the medium is studied, taking into account only the excitation directly produced by the ionizing particle and neglecting the one due to the reabsorption of the Cerenkov radiation (Eq. (41)). It is shown that for the calculation of this energy it is necessary to take into account the damping constants (g_i) of the bound electrons of the medium, while the ideal, but physically impossible assumption of a perfectly transparent medium leads to results in contradiction with experience. Actually it is found that in the separation of the energy loss into energy absorbed in the excitation of the atoms of the medium and energy dispersed as Cerenkov radiation, an essential role is played by the ratio (form. (45)):

$$\frac{\text{breadth of the spectroscopic lines}}{\text{density of the medium}}$$

(multiplied by constant quantities which make it adimensional). It is seen that the larger this ratio is the more favoured is the local dissipation causing the excitation of the atoms of the medium, and the more disfavoured is the emission of Cerenkov radiation. In this way one may easily explain, on the lines of the Fermi theory, the particular attitude of dense media to the emission of Cerenkov radiation. The problem of the energy by loss ionization is classically discussed by supposing the absorption

bands for ionization as pertinent to very broad absorption lines. It is thus found that the energy loss by ionization, with energy transfers smaller than η , should be represented by formula (57). This formula gives a good agreement with experiments (Fig. 1, 2). In the case of emulsions in particular, (Fig. 1), it is possible to explain the rapid increase beyond the minimum experimentally observed. A formula allowing the calculation of the intensity and the spectral distribution of the Cerenkov radiation (formula (66)) is also given. It is pointed out that in particular there should exist some relation between the broadness of the spectroscopic lines and the structure of the Cerenkov bands, suitable for experimental verification. In the case of solids, only the natural width of the lines required by the uncertainty principle should prevent the emission of part of the Cerenkov bands in the X-ray region. This theory leads to the expectation that in the case of dense media a simultaneous increase of ionization and Cerenkov radiation ought to be observed in favorable conditions.

1. — Introduction.

The method for handling the energy loss of a relativistic ionizing particle, taking into account the polarizability of the medium, has been given by FERMI (¹) and then generalized and extensively applied by WICK (²), HALPERN and HALL (³) and others. This method consists essentially in the identification of the energy lost by collisions at impact parameters larger than ϱ ($\varrho > \varrho_0 \approx$ atomic radius), with the flux of the Poynting vector coming out from a cylinder having its axis on the particle trajectory and of radius ϱ . The energy lost by an ionizing particle will then contribute to the excitation and ionization of the atoms of the medium as well as to the formation of the Cerenkov radiation, if one neglects other possible effects which may take place at extreme relativistic energies. The repartition of this energy between ionization and Cerenkov radiation is of particular interest for modern experimental techniques concerning the detection of high energy ionizing particles which are based either on ionization processes produced by them or, more recently, on the Cerenkov radiation they generate. One of the first systematic attempts to evaluate this energy repartition has been carried out by SCHÖNBERG (⁴), who, considering a perfectly transparent ideal medium, found out that the relativistic increase of the energy loss beyond the minimum in such a medium

(¹) E. FERMI: *Phys. Rev.*, **56**, 1242 (1939); **57**, 485 (1940).

(²) G. C. WICK: *Ric. Scient.*, **11**, 273 (1940); **12**, 858 (1941); *Nuovo Cimento*, **1**, 302 (1943).

(³) O. HALPERN and H. HALL: *Phys. Rev.*, **57**, 459 (1940); **73**, 477 (1948).

(⁴) M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 159 (1951).

should be exclusively due to the emission of the Cerenkov radiation, and this is a confirmation of a previous result obtained by A. BOHR (5) based on the same hypothesis but with a different procedure. SCHÖNBERG also reached the conclusion that the energy lost in the excitation of the atoms of the medium (including in that fraction also the energy dissipated by ionization) should not have any relativistic increase. All these features of the phenomenon considered should be independent of the density of the medium, so that highly rarified media which show a rather relevant relativistic increase of the energy loss (1-3) should be, against experimental evidence, more suitable than dense media, for the emission of the Cerenkov radiation.

The problem of the primary specific ionization has been theoretically outlined by POIANI and the present author (6), who, introducing the cross-sections for photo-electric effect, conclude that, it is possible to foresee theoretically that the ionization goes on, practically unaffected by the polarizability, within a cylinder having its axis on the particle trajectory and radius

$$(1) \quad \Delta \approx \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi Ne^2}} \quad (N = \text{number of electrons per cm}^3).$$

The ionization beyond this limit is practically forbidden. This confirms a previous result reached by A. BOHR (5) by different reasoning. This circumstance allowed the expectation that the ionization increases by $\sim 30\%$ beyond the minimum for gases in normal conditions, which has been recently confirmed by experiment (7).

Subsequently SCHÖNBERG (8), in order to explain the disagreement between his results and experiments has advanced a modification of the Fermi theory on the basis of the hypothesis that the field generated by the ionizing particle should be calculated up to the distance given by (1) neglecting the polarizability of the medium ($\epsilon = 1$). On the lines of his previous work (4), taking into account the modified fields, and assuming a perfectly transparent medium, he carries out the separation (9) of the energy lost in the excitation and in Cerenkov radiation, with the result that in this case the Cerenkov radiation is disfavored with respect to the excitation.

The aim of the present paper is to re-examine the problem of the repartition of the energy lost by an ionizing particle among all different possible processes. In order to grasp clearly the problem it is necessary to point out since the very

(5) A. BOHR: *Det. Kgl. Dans. Vid. Sels.*, **24**, n. 19 (1948).

(6) P. BUDINI e G. POIANI: *Congresso di Bologna della S.I.F.*, Sett. 1950; *Nuovo Cimento*, **9**, 199 (1952).

(7) S. G. GOSH, G. M. D. B. JONES and J. G. WILSON: *Proc. Phys. Soc.*, **65**, 58 (1952).

(8) M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **9**, 372 (1952).

(9) M. HUYBRECHTS and M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **9**, 764 (1952).

beginning that if one neglects processes of other kinds involved at very high energies, that energy will essentially contribute to three different phenomena:

- (a) ionization of the atoms of the medium;
- (b) excitation of the atoms of the medium;
- (c) emission of the Cerenkov radiation.

We shall specify as «secondary» the ionization and the excitation due to the eventual re-absorption of the Cerenkov radiation.

The last two processes (b) and (c) will be handled on the lines of the Fermi theory and it will be shown that experimental evidence may be easily accounted for without modifying the Fermi theory if one considers values of the damping constants different from zero. In particular, one may easily understand that as the density of the medium approaches zero, the Fermi theory continuously tends to theories⁽¹⁰⁾ which neglect the density effects, in which the emission of the Cerenkov radiation does not come into consideration. Thus the formula (66) obtained for the intensity of the Cerenkov radiation gives good account of the fact that rarefied gases are not suitable for the emission of the Cerenkov radiation.

To calculate the ionization it would be necessary to introduce the photo-electric cross-sections and in this sense it seems impossible to have a rigorous theory based on classical assumptions. Starting from the remark that it will be not allowed to consider the ionization as a resonance excitation with frequencies rigorously determined ($g_i = 0$), we have attempted to analyze the ionization on a classical basis regarding the absorption band due to ionization as wide absorption lines. In this way it is possible to explain the experimental results for the ionization, and, in particular, the sharp increase⁽¹⁰⁾ beyond the minimum experimentally observed becomes plausible. According to this interpretation the relativistic increase as soon as the energy of the ionizing particle exceeds the rest energy, is not consistent with the energy which is dissipated in processes (b) and (c), but is consistent with processes (a)(b) and (a)(c). It follows that in dense media one ought to observe a simultaneous increase of the ionization as well as of the Cerenkov radiation [(a) and (c)]; on the other hand, in rarified gases, a simultaneous increase of the ionization and excitation (a)(b), has to be expected.

2. - General expressions for the energy lost locally in the medium.

The problem of the energy lost by a relativistic particle by ionization through not to close collisions may be outlined quite generally in the fol-

⁽¹⁰⁾ N. BOHR: *Det. Kgl. Dans. Vid. Sels.*, **18**, 8 (1948).

lowing manner: let

$$(2) \quad \frac{S(\varrho, \omega)}{\hbar\omega} d\omega,$$

be the flux of photons having frequency included in $d\omega$ and flowing over at a distance ϱ from the particle trajectory. On calling $\sigma(\omega)$ the cross section concerning a certain interaction among these photons and the atoms of the medium, the total number of photons lost by the ionizing particle per centimeter because of such interaction, between ϱ and $\varrho + d\varrho$, is then

$$(3) \quad \frac{\partial f(\varrho)}{\partial x} d\varrho = \frac{n}{v} d\varrho \int_0^\infty \frac{S(\varrho, \omega)}{\hbar\omega} \sigma(\omega) d\omega, \quad \begin{aligned} n &= \text{number of atoms per cm}^3 \\ v &= \text{velocity} \end{aligned}$$

and the corresponding energy loss is

$$(4) \quad \frac{\partial w(\varrho)}{\partial x} d\varrho = \frac{n}{v} d\varrho \int_0^\infty S(\varrho, \omega) \sigma(\omega) d\omega.$$

Introducing in place of $\sigma(\omega)$ the photo-electric quantistic cross-section, Eqs. (3) and (4) give the primary specific ionization and the corresponding energy loss (*). We shall calculate the energy loss by excitation of the atoms of the medium. As long as ϱ is larger than the atomic dimensions, $n\sigma(\omega)$ in Eq. (4) may be replaced by the classical absorption coefficient which, as it is well known, may be expressed in the form

$$(5) \quad n\sigma(\omega) = -\operatorname{Re} \frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{e}, \quad (\operatorname{Re} = \text{real part})$$

where $\varepsilon(\omega)$ is the dielectric constant of the medium (*). In formula (5) $\varepsilon(\omega)$ is supposed to be complex, corresponding to an absorbing medium. Taking

(*) This definition is strictly valid only in the case of very rarified gases; however it may be considered as strictly valid also in the general case provided that in the expressions for S one replaces $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ with \mathbf{E}^2 (see R. BECKER: *Teoria della Elettricità*, II (Firenze, 1950), § 26). This is in argument with the fact that fields act on the medium electron proportionally to the square of the electric field. On the basis of the correspondence principle these considerations can be extended also to the quantized case.

into account (6) that

$$(6) \quad S(\varrho, \omega) = \frac{2ee^2\omega^2\varrho}{\pi r^3|\varepsilon|^2} [1 - \beta^2\varepsilon] \{ |K_1(\chi)|^2 + |1 - \beta^2\varepsilon| |K_0(\chi)|^2 \},$$

where

$$(6') \quad \chi = \frac{\omega\varrho}{r} \sqrt{1 - \beta^2\varepsilon},$$

and K are the modified Hankel functions, one obtains

$$(7) \quad \frac{dW_{\text{exc}}}{dx} d\varrho = \frac{2e^2\varrho}{\pi r^4} d\varrho \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{i\omega^3}{F(\omega)} [1 - \beta^2\varepsilon] \{ |K_1(\chi)|^2 + |1 - \beta^2\varepsilon| |K_0(\chi)|^2 \} d\omega.$$

Considering that (7) is nothing else than the derivative with respect to ϱ of the well known Fermi (1) formula:

$$(8) \quad \frac{\partial W_{\text{Fe}}}{\partial x} \Big|_{>\varrho} = \frac{2e^2}{\pi r^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\varepsilon} - \beta^2 \right) \chi^* K_1(\chi^*) K_0(\chi) i\omega d\omega,$$

let us calculate the energy lost by an ionizing particle in the excitation of the atoms contained in a cylindrical spatial interval of radius ϱ_0 and ϱ_1 , $\varrho_1 \gg \varrho_0$, and ϱ_0 being of the order of the atomic dimensions.

The Fermi formula gives the total amount of energy sent by the particle at a distance larger than ϱ , and therefore the energy lost by excitation and by Cerenkov radiation is also included (4). It follows that

$$(9) \quad \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{\partial W_{\text{exc}}}{\partial x} d\varrho = \frac{dW_{\text{exc}}(\text{I+II})}{dx} \Big|_{\varrho_0} = \frac{\partial W_{\text{Fe}}}{\partial x} \Big|_{>\varrho_0} - \frac{\partial W_{\text{Fe}}}{\partial x} \Big|_{>\varrho_1}.$$

Supposing $\varrho_1 = \infty$, and the medium perfectly transparent to the Cerenkov radiation it is seen from Eq. (9) that the integral from ϱ_0 to ∞ of Eq. (7) is equal to the total amount of the energy loss minus the energy dissipated in the Cerenkov radiation, i.e. to the amount of energy which remains in the medium because of the atomic excitation. In the general case of an absorbing medium Eq. (9) gives the energy spent in the excitation between ϱ_0 and ϱ_1 ; in this excitation is included the excitation directly produced by the field of the ionizing particle (primary) as well as the one due to the

absorption of the Cerenkov radiation (secondary) up to ϱ_1 . For this reason it has been written $W_{\text{exc}}(I + II)$. To calculate the difference shown in Eq. (9), let us write.

$$(10) \quad \varepsilon(\omega) = \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) + i \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$$

and

$$(10') \quad \chi^* K_1(\chi^*) K_0(\chi) = A(\chi) + iB(\chi),$$

a , A , b , B being real quantities; then, it may be easily seen that Eq. (8) may be written in the form

$$(11) \quad \frac{\partial W_{\text{Fe}}}{\partial x} \Big|_{>\varrho_1} = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \{ |\varepsilon|^{-2} (bA - aB) + \beta^2 B \} \omega d\omega .$$

If ϱ_0 is of the order of magnitude of atomic dimensions, the corresponding argument of the Hankel functions (given by (6')) has a modulus smaller than 1. In fact, it will be seen, that for values of ω concerned with the integral, when ω is so small that $\varrho_0 \omega / v \ll 1$ one has $|\sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon}| \approx 1$ so that $|\chi| \ll 1$ and when ω is so large that $\varrho_0 \omega / v > 1$ (X ray zone) one has $\varepsilon \approx 1$ so that for values of β approaching 1, which we are interested in, one has again $(\varrho_0 \omega / v) |\sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon}| = |\chi| \ll 1$. In this case, the Hankel functions may be replaced with their asymptotic expressions for $|\chi| \ll 1$:

$$(12) \quad K_0(\chi) = \log \frac{2}{\gamma \chi}, \quad K_1(\chi) = \chi^{-1}, \quad (\log \gamma = 0,577....)$$

so that in Eq. (10')

$$(13) \quad A = \log \frac{2v}{\gamma \omega |\sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon}| \varrho_0}, \quad B = -\frac{1}{2} \varphi,$$

being

$$(14) \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\beta^2 b}{1 - \beta^2 a} .$$

Hence, when $\varrho = \varrho_0$, Eq. (11) becomes

$$(15) \quad \frac{dW_{\text{Fe}}}{dx} \Big|_{>\varrho_0} = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{\omega b}{|\varepsilon|^2} \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \varrho_0^2} d\omega + \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \varphi \left(\frac{a}{|\varepsilon|^2} - \beta^2 \right) \omega d\omega .$$

Let us observe that φ may assume only negative values which are included between 0 and $-\pi$ and precisely, when

$$(16) \quad 1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) > 0,$$

one has $-\pi/2 < \varphi < 0$, (Bohr frequencies)

and when

$$(17) \quad 1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) < 0,$$

one has $-\pi < \varphi < -\pi/2$. (Cerenkov frequencies)

Now, it is easily seen that when the damping constants have not too large values only the frequencies corresponding to $\varphi \approx -\pi$ and $\varphi \approx 0$ contribute remarkably to the second integral (with reference to the other frequencies the first term in (15) largely prevails over the second one and the contributions pertinent to $-\pi/2 + \delta$ are balanced by those pertinent to $-\pi/2 - \delta$). With reference to frequencies corresponding to $\varphi \approx -\pi$ one may write

$$(18) \quad \varphi = \frac{\beta^2 b}{\beta^2 a - 1} \approx -\pi$$

and for those corresponding to $\varphi \approx 0$:

$$(19) \quad \varphi = -\frac{\beta^2 b}{1 - \beta^2 a}.$$

Replacing these expressions in (15) one easily gets:

$$(20) \quad \left. \frac{dW_{Fe}}{dx} \right|_{>\omega_0} = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \left(\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \rho_0^2} - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon \right) d\omega + \\ + \frac{e^2}{r^2} \int_{\text{Cerenkov}} \left(\beta^2 - \frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \right) \omega d\omega,$$

the second integral being extended only to the Cerenkov frequencies. It represents the Cerenkov radiation emitted and it may be reduced to the well known Frank and Tamm formula (11) attributing zero value to the damping constants.

(11) I. FRANK and I. TAMM: *Compt. Rend. Ac. Sci. URSS*, **14**, 109 (1937); I. TAMM: *Journ. of Phys. URSS*, **1**, 439 (1939).

Let us now calculate $(dW_{Fe}/dx)|_{>\varrho_1}$. We shall choose ϱ_1 , supposing that it is much larger than ϱ_0 , so that the Hankel functions can be substituted by the expressions valid for large values of the argument

$$(21) \quad K_0(\chi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\chi}} e^{-\chi}.$$

We will further state that ϱ_1 should in any case not be so large that the Cerenkov radiation shall be completely absorbed between ϱ_0 and ϱ_1 . These two opposite conditions for ϱ , are generally satisfied in practical cases. In fact, we shall be mainly interested, for example, in the excitation (and, by extrapolation, in the ionization) occurring inside an experimental track; in this case ϱ_1 shall be assumed of the order of the track radius, and if the track occurs in a nuclear emulsions, ϱ_1 has to be considered of the order of a grain diameter, and we have $\varrho_1 \approx 10^3 \varrho_0$, but practically nothing of the Cerenkov radiation is absorbed inside ϱ_1 .

According to conditions stated for ϱ_1 it follows that

$$(22) \quad A = \frac{1}{2}\pi \cos \frac{\varphi}{2} \exp [-2|\chi| \cos \varphi/2], \quad B = -\frac{1}{2}\pi \sin \frac{\varphi}{2} \exp [-2|\chi| \cos \varphi/2]$$

so that

$$(23) \quad \frac{dW_{Fe}}{dx}|_{>\varrho_1} = \frac{e^2}{v^2} \int_0^\infty \exp \left[-2 \frac{\omega}{v} |\sqrt{1 - \beta^2 \epsilon}| \cos \frac{\varphi}{2} \varrho_1 \right] \cdot \left\{ |\epsilon|^{-2} \left(b \cos \frac{\varphi}{2} + a \sin \frac{\varphi}{2} \right) - \beta^2 \sin \frac{\varphi}{2} \right\} \omega d\omega.$$

Because of the presence of the exponential under the integral sign, and the very large value supposed for ϱ_1 , only the Cerenkov frequencies, that is frequencies such as

$$(24) \quad \varphi - < \frac{\pi}{2} \quad \text{that is:} \quad \beta^2 \operatorname{Re} \epsilon - 1 > 0,$$

sensibly contribute to the integral. Furthermore it is easily seen that the largest contributions are due only to the frequencies for which $\epsilon \approx -\pi$, so that, neglecting infinitesimal quantities, one may write

$$(25) \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 b}{(\beta^2 a - 1)^{1/2}},$$

$$(26) \quad 2 \frac{\omega}{v} |\sqrt{1 - \beta^2 \epsilon}| \cos \frac{\varphi}{2} \varrho_1 = \frac{\omega}{v} \beta^2 b \varrho_1,$$

which, when β approaches 1, is nothing but the absorption coefficient multiplied by ϱ_1 . Hence, Eq. (23) becomes

$$(27) \quad \frac{dW_{Fe}}{dx} \Big|_{>\varrho_1} = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{\omega}{v} \beta^2 b \varrho_1 \right] \left(\beta^2 - \frac{a}{|\varepsilon|^2} \right) \omega d\omega .$$

This formula says that only the Cerenkov radiation, which has not been absorbed up to the distance ϱ_1 , comes out from the cylinder of radius ϱ_1 . On placing Eqs. (27) and (20) into Eq. (9), one obtains

$$(28) \quad \frac{dW_{exc}(I + II)}{dx} \Big|_{\varrho_0} = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{\omega b}{|\varepsilon|^2} \left(\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \varrho_0^2} - \beta^2 a \right) d\omega + \\ + \frac{e^2}{v^2} \int_0^\infty \left(1 - \exp \left[-\frac{\omega}{v} \beta^2 b \varrho_1 \right] \right) \left(\beta^2 - \frac{a}{|\varepsilon|^2} \right) \omega d\omega .$$

The second term of the right hand side of Eq. (28) expresses evidently the Cerenkov radiation absorbed up to ϱ_1 , and therefore it is identical with the «secondary» excitation, as we have called it. Consequently, the primary excitation which we are searching for, is given by

$$(29) \quad \frac{dW_{exc}I}{dx} \Big|_{>\varrho_0} = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \left(\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \varrho_0^2} - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon \right) d\omega .$$

More generally, one may obtain the expression of the energy lost at a distance larger than ϱ_0 in processes having $\sigma(\omega)$ as atomic cross sections for a photon of frequency ω , by integrating Eq. (4) over ϱ , where S is intended to be replaced by relation (6). It is convenient to carry out the integration separately over Bohr and Cerenkov frequencies, respectively, and in the latter case, to express the Hankel functions through Bessel ones. With the application of the Lommel formula, one finally gets

$$(30) \quad \frac{dW\sigma}{dx} \Big|_{>\varrho_0} = \frac{ne^2c}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{\sigma(\omega)}{|\varepsilon|^2} \left(\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \varrho_0^2} - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon \right) d\omega .$$

The number of the corresponding processes is obtained by dividing simply the integrand by $\hbar\omega$.

3. – Integration of Eq. (29).

We shall first fix the relation expressing ε by writing

$$(31) \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \alpha \sum_{i=1}^r \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - ig_i\omega}, \quad \alpha = \frac{4\pi Ne^2}{m},$$

where $\omega_{i+1} > \omega_i$. Equation (31) appears more simple than the Lorentz form which may be reduced to the form (31) ⁽¹²⁾ through a new definition of ω_i . It is then

$$(32) \quad \omega \operatorname{Im} \varepsilon = \alpha \sum_{i=1}^r f_i \sigma_i(\omega),$$

where

$$(33) \quad \sigma_i(\omega) = \frac{g_i \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + g_i^2 \omega^2}.$$

It follows that by means of Eq. (32) the integral (29) is split into a sum of integrals, each related to a single line of frequency ω_i :

$$(34) \quad \left. \frac{dW_{\text{exc}} I}{dx} \right|_{>\rho_0} = \frac{4Ne^4}{mv^2} \sum_{i=1}^r f_i \int_0^\infty \frac{\sigma_i}{|\varepsilon|^2} \left[\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega_i^2 |1 - \beta^2 \varepsilon| \rho_0^2} - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon \right] d\omega.$$

For a better understanding it is convenient to start by putting in (34) $\varepsilon \equiv 1$. We may observe that in this case the function $\sigma_i(\omega)$ has a sharp maximum at $\omega = \omega_i$ and it is practically null for any other values of ω (it has to be noted that σ_i is proportional to the absorption coefficient in proximity to a spectroscopic line), while the term in brackets varies slowly with ω , so that it may be brought out of the integral. One gets then:

$$(35) \quad \begin{aligned} \left. \frac{dW_{\text{exc}} I}{dx} \right|_{>\rho_0} &= \frac{4Ne^4}{mv^2} \sum_{i=1}^r f_i \left(\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \omega_i^2 (1 - \beta^2) \tilde{\rho}_0^2} - \beta^2 \right) \int_0^\infty \frac{g_i \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + g_i^2 \omega^2} d\omega = \\ &= \frac{2\pi N e^4}{mv^2} \left(\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \tilde{\rho}_0^2 (1 - \beta^2) \tilde{\rho}_0^2} - \beta^2 \right), \quad \text{where } \tilde{\rho}_0 = \prod \omega_i^{f_i}, \end{aligned}$$

which is nothing but the well-known Bloch ⁽¹³⁾ formula.

⁽¹²⁾ R. BECKER: *Teoria della Elettricità*, II (Firenze, 1950), pag. 161.

⁽¹³⁾ F. BLOCH: *Ann. d. Phys.*, **16**, 285 (1933); *Zeitz. f. Phys.*, **81**, 363 (1933).

Let us now suppose in Eq. (34) $\varepsilon \neq 1$. If ω is much different from ω_i ; then σ_i is practically null and $\varepsilon \approx 1$. Hence, to calculate the integral it is sufficient to study the behaviour of the function to be integrated in proximity to the frequency ω_i of the i -th line. In this region we may write

$$(36) \quad |\varepsilon(\omega)|^2 = \left[1 - D_i(\omega) + \alpha f_i \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + g_i^2 \omega^2} \right]^2 + \\ + \left[\delta_i(\omega) + \alpha f_i \frac{g_i \omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + g_i^2 \omega^2} \right]^2,$$

where

$$(37) \quad D_i(\omega) = \alpha \sum'_{j=1}^r \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + g_j^2 \omega^2} \cong \frac{\alpha}{\omega^2} \sum_{j=1}^{i-1} f_j + \alpha \sum_{j=i+1}^r \frac{f_j}{\omega_j^2},$$

$$(38) \quad \delta_i(\omega) = \alpha \sum'_{j=1}^r \frac{f_j g_j \omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + g_j^2 \omega^2} \cong \frac{\alpha}{\omega^3} \sum_{j=1}^{i-1} f_j g_j + \alpha \sum_{j=i+1}^r \frac{f_j g_j \omega}{\omega_j^4},$$

where the symbol \sum' means that in the summation the term $j = i$ has to be excluded.

The approximations which have been made in the third members of Eqs. (37) (38) are allowable considering that only frequencies in the proximity of the frequency ω_i are important. On considering Eqs. (33) (36) (37) (38) we may write then (neglecting infinitesimal terms)

$$(39) \quad \frac{\sigma_i}{|\varepsilon|^2} = \frac{g_i \omega^2}{(\bar{\omega}_i^2 - \omega^2)^2 + g_i^2 \omega^2},$$

with

$$(40) \quad \bar{\omega}_i^2 = \omega_i^2 + \frac{\alpha f_i}{1 - D_i(\omega_i)}.$$

Hence it is seen that (39) still appears in the form of Eqs. (33), with the difference that the sharp maximum does not correspond to the frequency ω_i but to the frequency given by Eq. (40). The polarization effect appears then as a simple shift of the resonance frequencies, proportionally to the density of the medium (contained in α). It may be understood already at this stage that when the density approaches zero, there will be a certain density where the shifting (40) will be smaller than the indeterminacy of ω_i due to the width of the line. The theoretical results for this and smaller densities will be the same as in the case in which the medium polarizability is not taken into account ⁽¹³⁾. Eqs. (33) and (39) being formally identical, one may proceed to

the integration of Eq. (34) by using the same methods which lead to the Bloch formula (35). We thus obtain

$$(41) \quad \frac{dW_{\text{exc}}}{dx} \Big|_{>e_0} = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \sum_{i=1}^r f_i \left\{ \log \frac{4r^2}{\gamma^2 \omega_i^2 (1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\bar{\omega}_i))^2 \varrho_0^2} - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\bar{\omega}_i) \right\}.$$

(It can easily be proved that this procedure is rigorous also for the term $\beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon$). To evaluate the relation (41) we shall have to calculate the expression:

$$(42) \quad |1 - \beta^2 \varepsilon(\bar{\omega}_i)| = \sqrt{[1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\bar{\omega}_i)]^2 + \beta^2 [\operatorname{Im} \varepsilon(\bar{\omega}_i)]^2}.$$

By means of Eqs. (31) (40) one easily gets

$$(43) \quad \operatorname{Re} \varepsilon(\bar{\omega}_i) = \frac{\Theta_i^2 (1 - D_i)^3}{1 + \Theta_i^2 (1 - D_i)^2},$$

$$(44) \quad \operatorname{Im} \varepsilon(\bar{\omega}_i) = \frac{\Theta_i (1 - D_i)^2}{1 + \Theta_i^2 (1 - D_i)^2},$$

where

$$(45) \quad \Theta_i = \frac{g_i \omega_i}{\alpha f_i} = \frac{mg_i \bar{\omega}_i}{4\pi N e^2 f_i},$$

and substituting this relation in Eq. (42), one obtains,

$$(46) \quad |1 - \beta^2 \varepsilon(\bar{\omega}_i)| = \sqrt{\left[1 - \beta^2 \frac{\Theta_i^2 (1 - D_i)^3}{1 + \Theta_i^2 (1 - D_i)^2} \right]^2 + \left[\beta^2 \frac{\Theta_i (1 - D_i)^2}{1 + \Theta_i^2 (1 - D_i)^2} \right]^2}.$$

The solution of the problem is then achieved on substituting this relation and the relation (43) in (41).

4. – Energy spent in excitation.

As it is easily seen from Eq. (46), the quantities Θ_i , given by Eq. (45) and containing the ratio $g_i/\text{density}$ are of fundamental importance for the separation of the energy lost in excitation, and the one lost in Cerenkov radiation.

Let us consider some particular cases.

a) *Dense media with narrow lines.* — Let us suppose that

$$(47) \quad \Theta_i \ll 1 \quad \text{that is:} \quad g_i \bar{\omega}_i \ll \alpha f_i = \frac{4\pi Ne^2}{m} f_i,$$

for every i , which corresponds to a medium having a high density and small half-breadth of the lines ($\approx g_i$). In this case the terms of Eq. (46) containing the quantities Θ_i may be neglected and therefore Eq. (41) becomes:

$$(48) \quad \frac{dW_{\text{exc}}}{dx} \Big|_{>\rho_0} = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \sum_{i=1}^r f_i \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \bar{\omega}_i^2 \rho_0^2}.$$

This equation coincides with the relation derived by SCHÖNBERG (4) for the excitation. According to Eq. (48) no relativistic increase should occur for the energy spent in the excitation, and the whole relativistic increase of the complete energy loss, described by Eq. (8) is due to the second term of Eq. (20) which has been previously neglected and which represents the Cerenkov radiation. This is the result obtained by SCHÖNBERG who puts $g_i = 0$. In this case, (47) is satisfied for every value of N , i.e. of the density, and hence also in rarefied gases, the relativistic increase should be due exclusively to the Cerenkov radiation; moreover, since the Fermi theory allows the expectation that the smaller the medium density the larger is the relativistic increase of the complete energy loss, it follows that, if one puts $g_i = 0$, a greater emission of the Cerenkov radiation should be expected in rarefied media. On the contrary not even in the case of dense media is Eq. (47) satisfied for hard X-rays when in the computation of the g_i one takes into account only the contribution due to the uncertainty principle (natural breadth); it ensues in this way that, for example, Θ should be certainly larger than 10 for K lines of Ag and Br.

b) *Rarefied gases and dense media with broad lines.* — Let us suppose N to be so small that for any value of i the relation

$$(49) \quad \Theta_i \gg 1, \quad g_i \bar{\omega}_i \gg \alpha f_i = \frac{4\pi Ne^2}{m} f_i,$$

holds (from which it follows that $D_i \ll 1$). The relation (49) can always be realized because the quantities g_i are never null, and at least they have the value required by the indeterminacy principle. Then, by means of Eqs. (43) and (46), the relation (41) becomes

$$(50) \quad \frac{dW_{\text{exc}}}{dx} \Big|_{>\rho_0} = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \sum_{i=1}^r f_i \left[\log \frac{4v^2}{\gamma^2 \bar{\omega}_i^2 \rho_0^2 \sqrt{(1 - \beta^2 + \beta^2 D_i)^2 + \beta^4/\Theta_i^2}} - \beta^2 \right].$$

Let us point out that $\beta^2 D_i$ and β^4/Θ_i^2 are very small; then so far as the energy of the ionizing particle is such that for any i it is

$$(51) \quad (\beta E)^{-2} = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} > \sqrt{D_i^2 + \Theta_i^{-2}} \sim \frac{\alpha}{\omega_i^2} \sqrt{\left[\sum_{j=1}^{i-1} f_j \right]^2 + \frac{\omega_i^2}{g_i^2} f_i^2},$$

Eq. (50) identifies with the Bloch formula (35).

Clearly then, so far as the energy satisfies the relation (51), which is larger as the density of the medium is smaller, (more precisely it varies with the inverse square root of the density), the whole energy loss is due to the excitation of atoms and ionization of the medium and therefore there is no emission of Cerenkov radiation. For energies beyond this limit, i.e. such as

$$(52) \quad (\beta E)^{-2} = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \ll \sqrt{D_i^2 + \Theta_i^{-2}},$$

the energy lost by atomic excitation goes into saturation. With reference to lines which are not too broad, the second term under the square root in (50) prevails over the first so that the limiting value of the energy loss assumes the form:

$$(53) \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{dW_{\text{exc}} I}{dx} \Big|_{>e_0} = \frac{2\pi N e^4}{mv^2} \sum_{i=1}^r f_i \left[\log \frac{4v^2 g_i}{\gamma^2 Q_0^2 \alpha \omega_i f_i} - 1 \right],$$

which increases with increasing absorption (g_i) and decreasing density. However, if g_i increases indefinitely it can certainly not occur that also the limiting energy loss by excitation increases indefinitely: in fact, it is known that the whole energy loss, given by Eq. (8), tends, independently of the values of the g_i quantities, to a saturation limit. This result agrees with Eq. (50). In fact, if g_i increases indefinitely, the term in Θ_i^{-2} under the square root in (50) tends to zero and there remains the term in D_i which is independent of the damping constants. The value of the energy loss thus obtained practically coincides with the value given by FERMI (1), HALPERN and HALL (3) for the total energy loss. (Actually it is slightly larger but it has to be pointed out that if g_i are supposed to have too large values the adopted approximations become invalid. With exact calculation one has to obtain the right total energy loss as (20) shows).

Returning to the case of gases with narrow lines, we have that when the energy loss by excitation goes in saturation, as described by Eq. (53), any subsequent increase of the total energy loss of the primary particle must be converted into Cerenkov radiation until the total Fermi saturation is reached.

The energy at which the emission of the Cerenkov bands starts will be given by the inverse of (51). More exactly (see paragraph 6)

$$(54) \quad (\beta E)^{-2} = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} < \frac{1}{2} \Theta_i^{-1} = \frac{2\pi Ne^2 f_i}{mg_i \bar{\omega}_i}.$$

Since the theory without density effect may be considered valid while Eq. (51) is satisfied, the excitation track concerning the i -th line will broaden, according to Williams theory, up to the collision parameter

$$(55) \quad \Delta_i = \sqrt{\frac{mg_i v^2}{4\pi Ne^2 f_i \sigma_i}}.$$

For energies leading to collision parameters beyond this limit the emission of the Cerenkov radiation does occur. The quantities Δ_i given by Eq. (55) may then be considered as the collision parameter beyond which the emission of the Cerenkov radiation starts for the i -th line. When $g_i = 0$ one obtains the SCHÖNEERG result stating that the Cerenkov radiation is produced in close proximity of the track.

All the cases so far discussed together with the intermediate cases may occur in reality. Suppose for example that there is a dense medium with broad lines such as to satisfy Eq. (49); an initial increase of the energy lost by excitation will occur beyond the minimum and the corresponding Cerenkov bands will be absent, till the energy satisfying Eq. (54) is reached; after that the Cerenkov bands are emitted until the complete saturation is achieved. The Cerenkov band may be completely absent if line is too broad. The computation of the energy spent in the emission of the Cerenkov radiation will be discussed in section 6.

5. – Ionization.

A rigorous theory of the ionization can only be obtained if, from the very beginning, the cross sections for photo-electric effect are included in Eq. (30). The difficulty of such a rigorous treatment is partly due to the fact that these cross sections are generally not known except in the case of some light elements and partly to the lack of a rigorous quantistic theory of dispersion, i.e. of a rigorous expression for $\varepsilon(\omega)$. Furthermore the ionization appears to depend upon the polarizability of the medium up to small distances from the track axis ($\rho \approx \rho_0$)⁽¹⁴⁾; this circumstance makes it difficult to connect the theory valid for large collision parameters with the quantum theory valid for subatomic distances and to calculate exactly the absolute value of the specific ionization and the corresponding energy loss, however it should not

prevent the investigation of the behaviour of the ionization beyond the minimum (14).

Considering that the phenomenon of the ionization is related with continuity or, in the case of solid bodies, is undistinguishable from the phenomenon of excitation, a discussion of it can be attempted following classical methods. Our previous considerations do not allow us to regard the transitions to the continuum as pertinent to narrow lines, but considering that the absorption band by ionization is limited by a threshold, which could be considered as a maximum, we find it more proper to regard the absorption bands as broad lines. One may therefore expect that the behaviour of the energy loss by ionization (not the absolute value) is well expressed by Eq. (50). In order to make possible comparisons with experimental data we shall add to Eq. (50) the energy loss with energy transfers smaller than η at distances smaller than ϱ_0 (10):

$$(56) \quad \frac{dW_{\text{ion}}}{dx} \Big|_{<\varrho_0} = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \log \frac{m\eta\varrho_0^2\gamma^2}{2\hbar^2}.$$

Hence, one obtains that the energy loss by ionization with energy transfers smaller than η is represented by:

$$(57) \quad \frac{dW_{\text{ion}}}{dx} = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \left[\log \frac{mc^2\eta}{\hbar^2 \tilde{\omega}_0^2 \sqrt{F(\beta)}} - \beta^2 \right],$$

where $\tilde{\omega}_0 = \prod \tilde{\omega}_i^{f_i} \approx \bar{\omega}_0$ and:

$$(58) \quad F(\beta) = \prod_{i=1}^r \{ [1 - \beta^2(1 - D_i)]^2 + \beta^4 \Theta_i^{-2} \}^{f_i}.$$

If $\beta = 1$ one gets

$$(59) \quad F(1) \approx \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}_0^4} \prod_{i=1}^r \left[\left(\sum_{j=1}^{i-1} f_j \right)^2 + \left(\frac{\omega_i f_i}{g_i} \right)^2 \right]^{f_i} = \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}_0^4} \tilde{A}.$$

There are now two possible cases:

I) The absorption bands by ionization may be supposed to be « extremely broadened » lines so that $\omega_i/g_i \approx 1$; in this case the first term in the square bracket appearing in Eq. (59) is predominant and $\sqrt{F(\beta)}$ may be written in the form:

$$(60) \quad \sqrt{F(\beta)} = 1 - \beta^2 + \beta^2 \frac{\alpha}{\tilde{\omega}_0^2} \sqrt{\tilde{A}} \quad \text{with} \quad \sqrt{\tilde{A}} \lesssim 1.$$

(14) P. BUDINI: *Zeits. f. Naturforsch.*, **72**, 722 (1952).

II) The absorption bands are equivalent to «moderately broadened» absorption lines so that $\omega_i^2/g_i^2 \gg 1$; in this case the second term in the square bracket in Eq. (59) is predominant over the first one. This ought to be the most frequent case; for example, in the case of the hydrogen if one defines as line-breadth the one corresponding to the half-maximum of the absorption band one gets $\omega_i^2/g_i^2 \approx 25$. In this case one may write

$$(61) \quad \sqrt{F(\beta)_H} = \sqrt{(1-\beta^2)^2 + \beta^4 \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}_0^4} \tilde{A}_H}$$

where

$$\tilde{A}_H \gtrsim 1.$$

It is seen that the quantity \tilde{A} , according to its definition, has in both cases values not very different from 1. The substantial difference between the I) and II) case consists mainly in the manner by which the saturation is realized when $1 - \beta^2$ becomes smaller than $\beta^2(\alpha/\tilde{\omega}_0^2)\tilde{A}^{1/2}$. While in the former case (Eq. (60)) the saturation is similar to that obtained with regard to complete energy loss by means of the Halpern and Hall (3) formula, in the latter one (Eq. (61)) the saturation occurs much more rapidly (*).

We have calculated by means of Eq. (57) the behaviour of the ionization which should be expected in the case of emulsions in the limiting cases I) and II) above stated. In both cases we have placed $\tilde{A} = 1$. It has to be pointed out that eventual discrepancies of the value of A from unity may be compensated by modifying the value $\tilde{\omega}_0$ which is not known with precision. Furthermore we have assumed $\eta = 5$ keV; $\alpha = 5,45 \cdot 10^{33} \text{ s}^{-2}$;

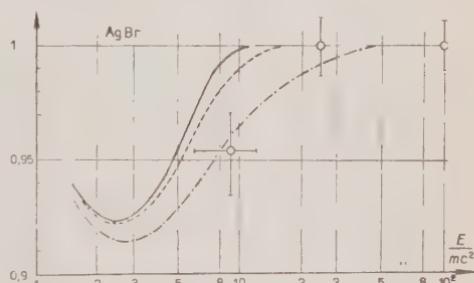


Fig. 1. — Total rate of ionization (transfers less than 5 keV). --- Theory I: with (57) and $F(\beta)_I$ given by (60), $\tilde{A} = 1$; ---- Theory II: with (57) and $F(\beta)_H$ given by (61), $\tilde{A} = 1$;
 ○ Exp. MORRISH (15); ··· Exp. DANIEL *et al.* (16).

(*) It is easily seen that the maximum radius of unperturbed ionization is given by (1) in both cases if one puts $\tilde{A} = 1$.

(15) A. H. MORRISH: *Phil. Mag.*, **43**, 533 (1952).

(16) R. R. DANIEL, J. H. DAVIES, J. H. MULVEY and D. H. PERKINS: *Phil. Mag.*, **43**, 753 (1952).

$\hbar\tilde{\omega}_0 = 470$ eV (ionization potential of silver (⁹)). The result is given in Fig 1 where the experimental data of MORRISH (¹⁵) and of DANIEL *et al.* (¹⁶) are also reported. All curves are normalized at 1 for $E \rightarrow \infty$. As it is seen the theoretical behaviour derived according to the II) case fits well with DANIEL's data. This agreement becomes still improved if one assumes a slightly smaller value for ω_0 or a value slightly larger than unity for \tilde{A}_{II} . The case I) gives a behaviour rather similar to the one which should be expected according to the HALPERN and HALL (⁸) formula.

Similarly we have calculated the behaviour of the ionization which should be expected in the case of oxygen under normal conditions and we have as-

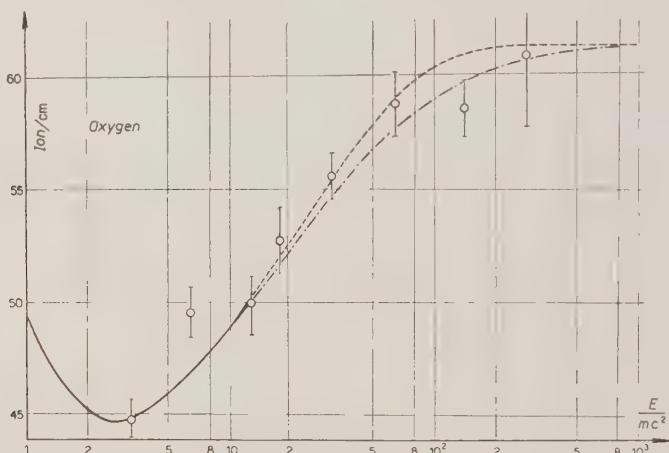


Fig. 2. — Total rate of ionization (transfers less than 1 keV).
 Σ Exp. GHOSH (⁷) *et al.* Theory: —, I - - -., II - - -.

sumed $\eta = 1$ keV, $\alpha = 1,37 \cdot 10^{30} \text{ s}^{-2}$, $\hbar\tilde{\omega}_0 = 89,2$ eV (⁹). The result is reported in Fig. 2 and compared with experimental data given by GOSH *et al.* (⁷). The theoretical curve has been normalized at $E = 3,2 \text{ MeV}$. As it is seen, in this case the diversity between cases I) and II) is rather small; in fact, up to values of $E/Mc^2 \approx 10$, both theoretical curves are identical with the one given by the Bethe and Bloch theory.

6. — The Cerenkov radiation.

In order to attain a better understanding of the role of the damping constants in the emission of the Cerenkov radiation, let us analyze what occurs when they are entirely neglected. Therefore we put $g_i = 0$ and we

obtain for the energy loss by Cerenkov radiation the FRANCK and TAMM (11) formula:

$$(62) \quad \frac{dW_{\text{Cer}}}{dx} = \frac{e^2}{v^2} \int \left(\beta^2 - \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \right) \omega d\omega ,$$

where the integral has to be calculated over all frequencies with respect to which the following relation holds:

$$(63) \quad \varepsilon(\omega) > \frac{1}{\beta^2} .$$

Eq. (62) also gives the spectral distribution of the emitted radiation, the essential features of which are also contained in (63). In fact, for a given value of β^2 , the emission bands of the Cerenkov radiation (see Fig. 3) are represented by frequencies included between ω'_1 and ω_1 , ω'_2 and ω_2 , and so on, for which Eq. (63) is satisfied. When $\beta \rightarrow 1$ the lowest limiting frequency of the first Cerenkov band tends to zero and the other ones tend to the frequencies ω_i^0 determined by the condition $\varepsilon(\omega_i^0) = 1$.

To evaluate the effect of the damping constants, let us suppose $g_i \neq 0$. The energy lost by the Cerenkov radiation is then given by the second term at the right hand side of Eq. (20):

$$(64) \quad \frac{dW_{\text{ler}}}{dx} = \frac{e^2}{v^2} \int \left(\beta^2 - \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)}{|\varepsilon(\omega)|^2} \right) \omega d\omega ,$$

which reduces to the Franck and

Tamm formula (62) for $g_i = 0$. The integration of formula (64) has to be performed over all frequencies determined by the relation:

$$(65) \quad \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) > \frac{1}{\beta^2} .$$

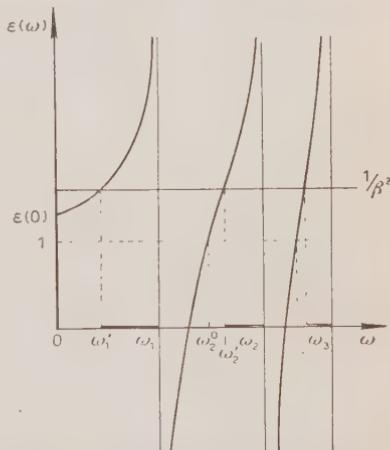


Fig. 3. Faesimile of $\varepsilon(\omega)$ as function of ω in an ideal medium ($g_i = 0$).

This relation states that φ , which is the argument of χ , is, in absolute value, larger than $\pi/2$; this circumstance can be considered as the condition for the formation of the Cerenkov radiation. It has to be pointed out, anyway, that

this condition is not sufficient for the observation of the Cerenkov radiation at a certain macroscopic distance ϱ from the track; in fact, if the argument ϱ is only a little larger than $\pi/2$, the exponent in Eq. (23) makes the integrand vanishing, i.e. the Cerenkov radiation of the corresponding frequency is emitted, but also rapidly absorbed. Therefore, to give a physical meaning to our considerations, and to put our predictions in a form suitable for direct comparison with experimental data, it will be necessary to define as Cerenkov radiation that which is effectively observable at a distance ϱ from the track axis, that is from (27):

$$(66) \quad \frac{dW_{\text{Cer}}}{dx} \Big|_{>\varrho} = \frac{e^2}{v^2} \int_{\text{Cerenkov}} \exp \left[-\frac{\omega}{v} \beta^2 \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) \varrho \right] \left(\beta^2 - \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)}{|\varepsilon(\omega)|^2} \right) \omega d\omega.$$

Let us now consider Eq. (64). In order to discuss it, we shall graphically represent $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ in Fig. 4. From a qualitative point of view the problem is similar to the one concerning a transparent medium ($g_i = 0$); here also one may define the limiting frequencies as ω'_i approaching to ω_i^0 when $\beta \rightarrow 1$. The only difference is that at frequencies $\bar{\omega}_i \approx \omega_i - g_i/2$, $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ has a maximum and no pole at ω_i as in the preceding case; hence, the emission of

a certain band of the Cerenkov radiation will start only when β^{-2} is smaller than the corresponding maximum (see Fig. 4). Now, it may be easily seen that the value of $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ at the maximum is about:

$$(67) \quad \operatorname{Re} \varepsilon(\bar{\omega}_i) \approx 1 + \frac{1}{2} \Theta_i^{-1},$$

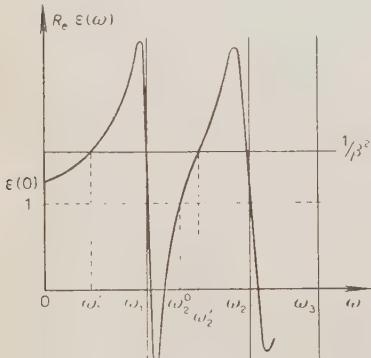
so that the corresponding starting condition becomes

$$(68) \quad (\beta E)^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} > 2\Theta_i.$$

Fig. 4. — Facsimile of $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ as function of ω in a real medium ($g_i \neq 0$).

condition for the energy lost by excitation. Thus, we again reach the conclusions of paragraph 4: when the energy loss by excitation goes to saturation any further increase of the total amount of the energy loss, as considered by the Halpern-Hall formula, is converted into Cerenkov radiation.

Of course, the formula (68) provides an effective condition only in the case where $\Theta_i \gg 1$, that is, dense media with large lines or rarefied gases. If $\Theta_i < 1$ then Eq. (68) is satisfied before the energy becomes relativistic. In



this case the emission mechanism of the Cerenkov radiation becomes similar to that considered by the Franck and Tamm formula ($g_i = 0$). For this reason, in dense media, there has to be expected a relativistic increase of the Cerenkov radiation, for kinetic energies higher than one or two times the rest energy, with respect to all those bands the lines of which satisfy the relation $\Theta_i < 1$. It has to be noted that the first band (from $\omega = 0$ to $\omega = \omega_1$) may not contribute to any increase from that energy which satisfies to the relation

$$(69) \quad (\beta E)^{-2} < \operatorname{Re} \varepsilon(0) - 1$$

on, so that if an increase of the Cerenkov radiation is found for energies which do not satisfy to Eq. (69) they must come from the anomalous dispersion zone.

Let us now discuss Eq. (66). It is seen that the condition for the Cerenkov radiation of a given frequency to be observed at a distance ϱ from the track axis is given by:

$$(70) \quad \beta^2 \frac{\omega}{v} \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) \varrho \ll 1 .$$

In general, (70) will forbid for every band a frequency interval having as superior limit ω_i by which the absorption is maximum (center of the line). The inferior limit will generally be at the left side of the frequency $\bar{\omega}_i$ corresponding to the maximum of $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)$ where the absorption band has still the half value of its maximum intensity and it will be the closer to ω_i the smaller is Θ_i , so that in dense media with narrow lines, where $\Theta_i \ll 1$, the condition (70) should not be very limiting (when ϱ is not very large).

It has to be noted, however, that generally the lower limit of the absorbed Cerenkov band can be at the right hand side of ω_i^0 which is the inferior limit of the emitted band for $\beta \rightarrow 1$ and which generally lies in a zone where the absorption is practically null.

To conclude, the bands of the Cerenkov radiation will be calculated by use of Eq. (65) and (66) case by case according to the geometrical characteristics of the employed apparatus (ϱ) and according to the dispersion ($\operatorname{Re} \varepsilon$) and absorption ($\operatorname{Im} \varepsilon$) characteristics of the medium within which the radiation is generated.

It is interesting to point out that on the lines of this theory a relativistic increase of the Cerenkov radiation should be expected for dense media with narrow lines (this might be in accordance with the recent experimental evidence of BASSI *et al.* (17)) simultaneously with a relativistic increase of ionization.

(17) P. BASSI, A. M. BIANCHI e C. MANDUCHI: *Nuovo Cimento*, **9**, 861 (1952).

It would be therefore interesting to set up experiments (for example in compressed gases) where both phenomena could be simultaneously detected.

The author is indebted the Professor W. HEISENBERG and to Professor F. SAUTER for helpful discussions on the subject, and to Professor W. HEISENBERG for the very kind hospitality in the Max Planck Institut für Physik in Göttingen. The author wishes also to thank professor M. SCHÖNBERG vor very kind epistolary correspondence and for an interesting discussion at the congress of the S.I.F.

This work was begun with a stipendium of the C.N.R. and continued with one of the Max Planck Gesellschaft.

RIASSUNTO

Si studia la ripartizione dell'energia perduta da una particella ionizzante relativistica, in un mezzo polarizzabile, tra energia che viene dissipata in prossimità della traiettoria della particella ionizzante ed energia che viene mandata a grande distanza sotto forma di radiazione (radiazione di Cerenkov). Si dà una formula (form. (30)) per calcolare l'energia dissipata localmente (per parametri d'urto maggiori delle dimensioni atomiche), qualsiasi sia il meccanismo della dissipazione. Si approfondisce il problema dell'energia dissipata localmente in eccitazione degli atomi del mezzo, nell'ambito della teoria di Fermi, prendendo in considerazione la sola eccitazione prodotta direttamente dalla particella ionizzante (e trascurando quella dovuta al riassorbimento della radiazione di Cerenkov) (form. (41)). Si dimostra che nel calcolo di questa energia è indispensabile tener conto delle costanti di smorzamento (g_i) degli elettroni legati del mezzo, mentre invece l'ipotesi limite, fisicamente irrealizzabile, di un mezzo perfettamente trasparente, porta a risultati in contraddizione con l'esperienza. Si trova precisamente che, nella ripartizione dell'energia perduta tra energia assorbita in eccitazione degli atomi del mezzo ed energia dispersa sotto forma di radiazione di Cerenkov, i rapporti:

$$\frac{\text{larghezza delle righe}}{\text{densità del mezzo}}$$

(moltiplicati per delle quantità che li rendono adimensionali (form. (45))) hanno un ruolo essenziale: tanto più grandi sono questi rapporti e tanto più viene favorita la dissipazione locale in eccitazione degli atomi del mezzo e sfavorita l'emissione della radiazione di Cerenkov. In tal modo si può facilmente spiegare, pur restando nell'ambito della teoria di Fermi, la particolare attitudine dei mezzi densi all'emissione della radiazione di Cerenkov. Si disente, in sede classica, il problema della energia spesa

in ionizzazione considerando le bande di assorbimento per ionizzazione come righe di assorbimento molto allargate; si trova così che l'andamento della perdita di energia per ionizzazione con trasferimenti di energia minori di η dovrebbe essere rappresentato dalla formula (57). Con questa formula si ottiene un ottimo accordo con i risultati dell'esperienza (fig. 1 e 2); in particolare nel caso dei mezzi densi (per esempio, emulsioni: fig. 1) si può spiegare la rapida salita dopo il minimo trovata da alcuni sperimentatori. Si danno delle formule per il calcolo della intensità e della distribuzione spettrale della radiazione di Cerenkov emessa e di quella osservabile ad una data distanza dalla traiettoria della particella ionizzante (form. (64), (65) e (66)). La teoria prevede che, nel caso dei mezzi densi, si dovrebbe poter osservare, in condizioni favorevoli, un simultaneo aumento relativistico, sia della ionizzazione che della radiazione di Cerenkov.

Dispersion of Ultrasonic Velocity in Some Organic Liquids.

S. PARTHASARATHY, A. F. CHHAPGAR and HARKRISHAN SINGH

National Physical Laboratory of India - New Delhi

(ricevuto il 7 Gennaio 1953)

Summary. — By exciting two crystals simultaneously at two different frequencies of about 4 and 16 MHz in the same medium and photographing the super-posed diffraction pattern, the velocities of ultrasonic waves in some organic liquid, particularly esters, were measured. The results show no dispersion of velocity within the experimental error of 1 metre in a thousand.

1. — Introduction.

The variation of ultrasonic velocity with frequency has been studied by many workers (¹). The anomalous absorption of ultrasonic waves in gases has been explained by the assumption of a relaxation process which gives rise to dispersion. This dispersion has been confirmed by experimental work. A similar relaxation process has therefore also been proposed for liquids to explain, at least in part, the anomalous absorption observed in organic liquids. But, experimental work to determine dispersion has so far not met with success. Some workers have claimed evidence for dispersion in certain liquids (although this has not been confirmed independently) while others have given negative results. Thus great importance attaches to the problem of dispersion in formulating a theory to explain the anomalous absorption of ultrasonic waves in liquids.

In carrying out measurements for dispersion, it is very important to take care of those factors which would give rise to errors in the final result. For example, the temperature at which the measurements are made should be carefully controlled, as otherwise a small change in temperature gives a greater change in the velocity. In order to avoid errors due to this cause, any time

(¹) L. BERGMANN: *Der Ultraschall* (ed. 1949).

lag and therefore any velocity change due to temperature is eliminated by taking the diffraction patterns simultaneously. The measurement of the wave-length, also, offers the same difficulty. By making measurements simultaneously, all such errors are neutralised and the final accuracy of the result depends only on the accuracy of measurement. This was discussed fully by PARTHASARATHY, PANDE and PANCHOLY in an earlier paper (2), where a single quartz crystal was excited simultaneously at two different frequencies to give a superposed diffraction pattern.

In the present set of experiments, however, it was decided to use two separate quartz crystals excited simultaneously at two independent frequencies. The pattern obtained in this set-up is identical to that when a single crystal is excited simultaneously at two frequencies, as was shown in an earlier paper (3). Since the two patterns are superposed and photographed simultaneously, the temperature of the liquid does not affect the result, as would be the case if the patterns were photographed independently. Further, since the patterns are photographed on the same plate, the distances between the lines are measured in the same traverse of the microscope and hence any error in this measurement affects both measurements equally. Therefore, the final value does not depend on temperature variations in the medium or on the proper setting of the plate on the microscope stage, while the absolute value of the velocity depends only on the accuracy of measurement.

2. — Experimental.

The diffraction patterns were obtained by the well-known Debye-Sears and Lucas-Biquard method. The crystals used were 2 mm and 1 cm in thickness and were plated uniformly on both sides. The frequencies used were about 4.3 MHz and 15.9 MHz and were measured accurately by a heterodyne wavemeter. A long focus telescope lens was used and gave a good dispersion. The accuracy of the measurements was $\pm 0.1\%$. The results are tabulated in Table I.

3. — Discussion.

As was stated earlier in the paper, liquids showing anomalous absorption of ultrasonic waves are expected to show dispersion. It is however found

(2) S. PARTHASARATHY, A. PANDE and M. PANCHOLY: *Journ. Sci. Ind. Res.*, 3, 7, 299 (1945).

(3) A. PANDE, M. PANCHOLY and S. PARTHASARATHY: *Journ. Sci. Ind. Res.*, 3, 2, 64 (1944).

that no dispersion exists for such organic liquids like benzene (2), carbon tetrachloride, etc. Moreover, for these liquids α/v^2 (where α is the absorption coefficient and v is the frequency) does not vary with v . It has however been reported by BEYER and SMITH (4) that for ethyl acetate α/v^2 varies with v . This has also been observed for other esters in this laboratory (5). This would

No.	Liquid	Temp. °C	Frequency MHz	Freq. Ratio Higher freq. Lower freq.	Ratio of fringes in the pattern	Velocity m/s	Difference in velocities at the two frequencies
1	Methyl acetate	23.9	4.313 15.891	3.684	3.687	1159 1158	-1
2	Ethyl acetate	27.8	4.313 15.848	3.676	3.676	1138 1138	0
3	n-Amyl acetate	24.1	4.313 15.884	3.683	3.685	1200 1200	0
4	Methyl salicylate	24.6	4.314 15.881	3.681	3.682	1412 1413	1
5	Ethyl butyrate	25.2	4.313 15.885	3.683	3.687	1175 1174	-1
6	Diethyl malonate	25.0	4.313 15.886	3.683	3.681	1303 1303	0
7	Diethyl phthalate	23.0	4.313 15.884	3.683	3.682	1430 1429	-1
8	Diethyl oxalate	24.4	4.313 15.885	3.681	3.685	1279 1279	0
9	Amyl formiate	23.9	4.313 15.882	3.682	3.675	1199 1200	1
10	Toluene	26.9	4.313 15.843	3.673	3.671	1294 1295	1
11	Carbon tetrachl.	23.4	4.316 13.008	3.013	3.023	928.1 928.1	0
12	Methyl Alcohol	26.3	4.313 15.857	3.678	3.675	1113 1114	1
13	Ethyl Alcohol	28.8	4.313 15.852	3.675	3.671	1165 1166	1
14	n-Butyl Alcohol	27.0	4.297 15.828	3.684	3.684	1235 1234	-1

(4) R. T. BEYER and M. C. SMITH: *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, **18**, 424 (1947).

(5) S. PARTHASARATHY, S. S. CHARI and D. SRINIVASAN: Unpublished work.

indicate the existence of a pronounced relaxation effect⁽⁶⁾ at frequencies which lie within the general range of experiment. It was therefore considered of great interest to find out the existence of dispersion in esters and a few of the esters were examined from this point of view. The results however show that the difference in the velocities at the two frequencies as shown in column 7,

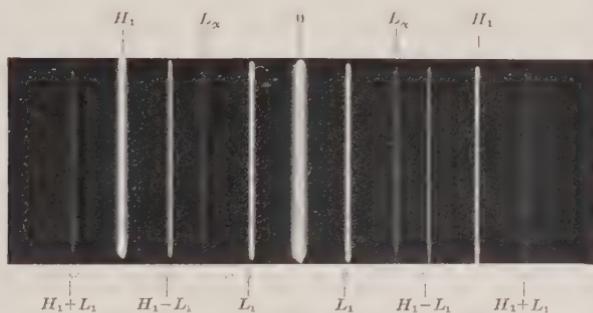


Fig. 1. — L = low frequency; H = high frequency

is, not more than 1 metre for all the liquids studied, which is within the limit of accuracy of the experiment. We have to conclude, therefore, that there is no dispersion in the liquids studied within the frequency limits of 4 and 16 MHz used.

(6) J. J. MARKHAM, R. T. BEYER and R. B. LINDSAY: *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 4, 353 (1951).

RIASSUNTO (*)

Eccitando contemporaneamente due cristalli a due differenti frequenze di circa 4 e 16 MHz nello stesso mezzo e fotografando le sovrapposte immagini di diffrazione, si sono misurate le velocità delle onde ultrasoniche in alcuni liquidi organici, particolarmente esteri. I risultati non mostrano dispersioni di velocità entro l'errore sperimentale di 1 %.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Absorption of Ultrasonic waves in Liquids at 5 MHz from Thermal Considerations.

S. PARTHASARATHY, D. SRINIVASAN and S. S. CHARI

National Physical Laboratory of India - New Delhi

(ricevuto il 7 Gennaio 1953)

Summary. — The absorption coefficient of a few organic liquids is determined from thermal measurements alone at 5 MHz making use of the fact that the heat output due to the passage of ultrasonics in liquids bears a constant ratio to the absorption coefficient of ultrasonics, provided the same voltage is applied to the crystal.

1. — Introduction.

The absorption coefficient of ultrasonics in liquids has been determined by a number of investigators (¹) using different methods. To mention a few, the interferometer method, the optical diffraction method and the radiation pressure method have been employed with different degrees of success. Each method has its own merits and shortcomings. In the present paper, an attempt is made to determine the absorption coefficient of ultrasonic waves in liquids by a new method, namely from thermal measurements alone, at 5 MHz.

It has been shown in a previous paper by us (²) that the thermal output of ultrasonics at 5 MHz in most liquids is strictly proportional to their absorption coefficients provided the crystal is supplied with a constant RF voltage. The only exception to this rule are those liquids which exhibit anomalous absorption, namely benzene or carbon disulphide. Hence assuming the value

(¹) L. BERGMANN: *Der Ultraschall* (1949 edition).

(²) S. PARTHASARATHY, D. SRINIVASAN and S. S. CHARI: *Thermal effect of ultrasonics in liquids and its relation to absorption* (under publication in *Acustica*).

of this constant from experiments on one or two liquids, known to be non-anomalous, it is possible to determine α/v^2 in most liquids from the heat output due to ultrasonics in these liquids.

2. — Experiment.

An X-cut quartz crystal of fundamental frequency 5 MHz was used as the transducer to which was fed the RF voltage from an aircraft transmitter. The liquid was contained in a double walled metal calorimeter, enclosed in a wooden box stuffed with cotton wool. The temperature was measured accurately on a sensitive mercury thermometer, suspended in the liquid a little above the crystal. The RF voltage applied to the crystal was measured by a vacuum tube voltmeter connected across the crystal and was maintained constant throughout the entire experiment. Since the ratio of the heat output to α/v^2 of the liquid is a constant only on this condition, it is very essential to see that the voltage never alters from its constant value.

Ultrasonics was passed for 30 minutes and the resulting rise in temperature of the liquid was determined with due correction for radiation losses. A blank experiment was carried out to determine the dielectric heating. The difference between the two values of heat output gives the amount of heat produced by ultrasonics alone. The details of the measurement of dielectric heating are given in a separate paper (3).

Six liquids whose absorption coefficients were already determined, were first studied and the amount of heat produced per second in them by ultrasonic waves was determined, the crystal voltage having been kept at 26 volts. The ratio of this heat produced per second to α/v^2 was calculated in each case and the average of those values, which was $3.2 \cdot 10^{-12}$ was taken as that to be used in subsequent measurements.

Next, the amount of heat produced per second by ultrasonic waves was determined in twenty organic liquids, whose absorption coefficients were not known previously. The crystal voltage was kept at 26 volts. Assuming the value of the constant just obtained, the absorption coefficients of these liquids were computed. To serve as a check on these measurements, their absorption coefficient was also determined by the radiation pressure method (4).

(3) S. PARTHASARATHY, D. SRINIVASAN and S. S. CHARI: *Absorption of ultrasonics from thermal considerations* (under publication).

(4) S. PARTHASARATHY, S. S. CHARI and D. SRINIVASAN: *Absorption of ultrasonic waves in liquids at 5 MHz by radiation pressure method* (under publication).

3. - Results.

Table I gives the values of α/v^2 of 21 organic liquids as determined by thermal output and by radiation pressure. It is seen from the table that the two values agree within experimental error.

TABLE I.

No.	Liquid	Temp. °C	Heat · 10 ³ in cal/s	$\alpha/v^2 \cdot 10^{15}$ from thermal measurement	$\alpha/v^2 \cdot 10^{15}$ by radiation pressure method
1	<i>o</i> -Chlorotoluene . . .	24	9.15	2.50	2.38
2	<i>p</i> -Chlorotoluene . . .	21	7.70	2.41	2.41
3	<i>o</i> -nitrotoluene	22	10.24	3.20	3.36
4	<i>m</i> -nitrotoluene	25	5.78	1.80	1.85
5	<i>n</i> -butyl acetate	22	6.47	2.02	1.94
6	Amyl acetate	21	6.11	1.91	2.34
7	Ethyl butyrate	22	9.82	3.09	2.80
8	Ethyl acetoacetate . .	23	5.11	1.60	1.45
9	Methyl oxalate	23	3.54	1.11	1.09
10	Ethyl benzoate	23	11.06	3.46	3.09
11	Diethyl phthalate . .	23	14.24	4.51	4.30
12	Capryl alcohol	23	6.64	2.07	2.23
13	<i>n</i> -Octyl alcohol	22	17.0	5.03	4.46
14	Ethylene glycol	23	9.39	2.90	2.69
15	Benzyl alcohol	23	4.23	1.32	1.59
16	Benzaldehyde	25	8.35	2.29	2.07
17	Dipentene	24	15.84	5.08	5.42
18	α -picoline	29	4.03	1.26	1.34
19	<i>p</i> -cymene	22	4.82	1.51	1.51
20	Dioxane	22	5.12	1.60	1.54
21	Bromo benzene	21	8.70	2.01	1.91

4. - Discussion.

Thus the thermal effect of ultrasonics can be used to determine the absorption coefficient; one shortcoming is that the method is only a comparative one which employs the value of the constant ratio $H/\alpha/v^2$ obtained first experimentally. However, the method is quick and simple and requires only a small quantity of liquid. But some precautions have to be taken, to avoid getting wrong results. For instance, the R F voltage applied to the crystal

must be kept at the same value, at which the constant ratio was obtained. The dielectric heating has to be corrected for.

This method also fails in the case of a few liquids but the failure is an indication that these liquids exhibit anomalous absorption.

A method is being developed in this laboratory to determine the absolute values of α/v^2 of liquids from thermal measurements alone.

RIASSUNTO (*)

Per mezzo di sole misure termiche si determina a 5 MHz il coefficiente di assorbimento di alcuni liquidi organici, sfruttando il fatto che l'emissione di calore dovuta al passaggio degli ultrasuoni nel liquido è in rapporto costante col coefficiente di assorbimento degli ultrasuoni, purchè al cristallo si applichi la stessa tensione.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Dipendenza delle autofrequenze di un solido dalla temperatura e dal volume, secondo la meccanica statistica.

P. G. BORDONI

Istituto Nazionale di Ultracustica « O. M. Corbino » - Roma

(ricevuto il 9 Gennaio 1953)

Riassunto. — Dalla equazione di stato dei solidi, tenendo conto della distribuzione quantistica di energia nei diversi modi di vibrazione e, ammettendo che il coefficiente di Grüneisen dipenda dallo stato del solido soltanto attraverso le variazioni della frequenza, si ricava la relazione tra le variazioni isoterme di frequenza e quelle a pressione costante. Si deduce inoltre per queste ultime una legge generale di dipendenza dalla temperatura che trova conferma in diverse verifiche sperimentali.

1. — Premessa.

Per caratterizzare la dipendenza delle autofrequenze ν_i di un solido — considerato come un insieme di oscillatori quantizzati — dal suo volume V e dalla temperatura T ci si serve abitualmente del coefficiente di GRÜNEISEN⁽¹⁾ γ_r definito da:

$$(1) \quad \gamma_r = - \left(\frac{\partial \log \nu}{\partial \log V} \right)_T,$$

ammettendo, in via approssimata, che esso sia indipendente dall'ordine dell'autofrequenza.

Il coefficiente γ_r non può essere però misurato direttamente, sia perchè a temperatura costante le variazioni reversibili di ν e di V che è possibile far

(1) Cfr. ad esempio: J. C. SLATER: *Introduction to chemical physics* (New York, 1939), p. 217; oppure: F. SEITZ: *The modern theory of solids* (New York, 1940), p. 138.

subire ad un solido sono molto piccole, sia perchè nel produrle vengono necessariamente alterate le condizioni al contorno, e quindi gli incrementi di v che è possibile misurare non sono dovuti unicamente al cambiamento di V . Ci si riduce pertanto a determinare γ_r in maniera indiretta, attraverso misure di dilatazione termica, di energia di coesione e così via.

Riesce invece direttamente accessibile all'esperienza la derivata analoga alla (1) eseguita a pressione costante, cioè:

$$(2) \quad \gamma_p = - \left(\frac{\partial \log v}{\partial \log V} \right)_p .$$

È pure direttamente misurabile la derivata logaritmica β di v rispetto a T a pressione costante, che è legata a γ_p dalla relazione:

$$(3) \quad \beta = - \left(\frac{\partial \log v}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial \log v}{\partial \log V} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial \log V}{\partial T} \right)_p = \alpha \cdot \gamma_p ,$$

essendo α il coefficiente di dilatazione cubica.

Nella presente nota si ricava una relazione tra γ_p e γ_r che consente il calcolo diretto di quest'ultima grandezza mediante le variazioni di v determinate sperimentalmente a pressione costante. I valori di γ_r che in tal modo si ottengono variano alquanto con T , riuscendo sempre abbastanza prossimi a quelli calcolati con altri procedimenti indiretti, nei quali si prescinde addirittura dalla dipendenza di γ_r da T .

Si determina inoltre la legge di variazione di β al variare della temperatura, e si verifica che i valori calcolati sono in buon accordo con quelli sperimentali. In particolare viene confermata e precisata un'osservazione fatta in un precedente lavoro (2), dimostrando che le variazioni di frequenza, nei pressi dello zero assoluto, riescono proprio infinitesime del quarto ordine rispetto alle variazioni di temperatura.

2. — Relazione tra γ_p e γ_r e calcolo delle derivate di quest'ultima.

Si può scrivere immediatamente una relazione tra i coefficienti definiti da (1) e (2) decomponendo la trasformazione isobara da A a B nel prodotto di una trasformazione isoterma da A a C (fig. 1) e di una isocora da C a B . Osservando che in A ed in C

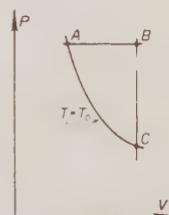


Fig. 1. — Decomposizione di una trasformazione a pressione costante AB nel prodotto di una isoterma AC e di una isocora CB .

(2) P. G. BORDONI: *Rend. Acc. Naz. Lincei*, **6**, 597 (1949).

la temperatura ha lo stesso valore, e che in B ed in C il solido ha egual volume, si ha

$$\frac{V_A}{v_A} \cdot \frac{v_B - v_A}{V_B - V_A} = \frac{V_A}{v_A} \left[\frac{v_C - v_A}{V_C - V_A} + \frac{v_B - v_C}{T_B - T_C} \frac{T_B - T_A}{V_B - V_A} \right].$$

Facendo tendere B [e quindi C] ad A , e tenendo presente le (1), (2), si ha

$$(4) \quad \gamma_P = \gamma_T - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \log \nu}{\partial T} \right)_V,$$

e quindi, per la (3)

$$(5) \quad \beta = \alpha \gamma_T - \left(\frac{\partial \log \nu}{\partial T} \right)_V.$$

In un solido macroscopicamente omogeneo ed isotropo, la generica auto-frequenza ν è legata al volume del solido ed alla compressibilità isoterma $\chi_T = -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$ dalla relazione ⁽³⁾

$$(6) \quad \log \nu = \frac{1}{6} \log V + \frac{1}{2} \log \frac{1}{\chi_T} + \text{cost.}$$

Risolvendo l'equazione di stato del solido rispetto a P , e trascurando i termini di ordine superiore al secondo, si ha

$$(7) \quad P(V, T) = P_0(T) + P_1(T) \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) + P_2(T) \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right)^2,$$

dove V_0 è il valore limite del volume allo zero assoluto ed in assenza di sollecitazioni.

In base alla definizione si ricava quindi l'espressione di χ_T

$$(8) \quad \chi_T = \frac{V_0}{V} \cdot \frac{1}{P_1(T) + P_2(T) \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right)}.$$

⁽³⁾ Cfr., ad esempio: J. C. SLATER: loc. cit. nota (1), p. 239. La (6) vale esattamente soltanto se la lunghezza d'onda è notevolmente maggiore della costante reticolare: cfr. L. BRILLOUIN: *Wave propagation in periodic structures* (New York, 1946), p. 17.

Si prescinde inoltre dalle possibili variazioni del coefficiente di Poisson con T e con V : cfr. F. SEITZ: loc. cit. nota (1), p. 138.

Derivando inoltre la (6) rispetto a $\log V$, a temperatura costante, e tenendo presente la (1) si ottiene

$$(9) \quad \gamma_x + \frac{2}{3} = \frac{V}{V_0} \frac{P_2(T)}{P_1(T) + P_2(T) \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right)}.$$

E infine mediante la (8) si ricava per γ_x

$$(10) \quad \gamma_x + \frac{2}{3} = \frac{V^2}{V_0^2} P_2(T) \cdot \chi_x.$$

Il calcolo della $(\partial \log v / \partial T)_V$ che figura nelle (4) e (5) riesce assai più semplice se, invece di servirsi direttamente della (6) e della (10), esse vengono semplificate mediante un conveniente ricorso diretto all'esperienza. Si può infatti osservare che in tutti i solidi le variazioni relative subite dalle compressibilità sono sempre assai maggiori delle corrispondenti variazioni di volume. Lo stesso può dirsi delle variazioni di χ_x in confronto a quelle di $P_2(T)$, in modo che, con buona approssimazione, al posto della (10) si può scrivere

$$(10') \quad \gamma_x + \frac{2}{3} = \mathcal{A} \chi_x,$$

dove \mathcal{A} è una costante indipendente da V e da T . Introducendo nella (6) la stessa semplificazione, la χ_x risulta proporzionale a v^{-2} in modo che la (10') diviene:

$$(10'') \quad \gamma_x + \frac{2}{3} = \frac{\mathcal{B}}{v^2},$$

essendo anche la \mathcal{B} una costante rispetto a T ed a V , la quale assume naturalmente, valori diversi per le diverse autofrequenze, dimodochè γ_x — in accordo con una ipotesi fondamentale — risulta indipendente dall'ordine delle v_i , ma, per una qualsiasi di esse, varia come v^{-2} col variare di V e di T .

Le derivate di γ_x calcolate mediante la (10') risultano approssimate per difetto ai valori effettivi dati dalla (10) se V e χ_x crescono o diminuiscono insieme, come ad esempio avviene a pressione costante. Migliore risulta invece l'approssimazione della (10'') in quanto nella (6) V e $1/\chi_x$ variano in senso opposto; tuttavia i valori che la (10'') fornisce sono ancora inferiori a quelli esatti. Sembra quindi lecito, nel calcolo delle derivate logaritmiche, trascurare il termine $2/3$ in confronto a γ_x , che è dell'ordine di $2 \div 3$, in modo che la (10'') si riduca a

$$(10''') \quad \gamma_x = \frac{\mathcal{B}}{v^2},$$

ed il coefficiente di Grüneisen risulti addirittura inversamente proporzionale al quadrato dei valori che una qualsiasi autofrequenza assume al variare del volume e della temperatura.

Derivando la (10'') rispetto a V per il tramite di ν si ha immediatamente, per la (1):

$$(11) \quad \left(\frac{\partial \gamma_T}{\partial V} \right)_T = -2 \frac{\mathcal{B}}{\nu^3} \left(\frac{\partial \nu}{\partial V} \right)_T = \frac{2\gamma_T^2}{V}.$$

Analogamente, derivando la (10'') rispetto a T e tenendo presente la (4):

$$(12) \quad \left(\frac{\partial \gamma_T}{\partial T} \right)_V = -2 \frac{\mathcal{B}}{\nu^3} \left(\frac{\partial \nu}{\partial T} \right)_V = 2\alpha \gamma_T (\gamma_P - \gamma_T).$$

Come prima conseguenza delle (11) (12), si possono valutare le variazioni massime di γ_T in tutto il campo delle variazioni V e T corrispondente allo stato solido. Siccome le massime variazioni isoterme reversibili di V sono dell'ordine di $10^{-2} V$, e, a sua volta, $2\gamma_T^2$ è dell'ordine di 10, a temperatura costante γ_T può variare al massimo del 10%. Invece le variazioni isocore riescono sensibilmente maggiori, in quanto α è prossimo a 10^{-4} , il prodotto $2\gamma_T(\gamma_P - \gamma_T)$ è anch'esso prossimo a 10, e le massime escursioni di temperatura possono anche superare 10^3 °K. Si vede quindi che γ_T , nei pressi del punto di fusione, può anche raggiungere un valore doppio di quello relativo alle basse temperature.

3. – Espressione di γ_P valida ad alta temperatura.

In un primo tempo converrà ricavare direttamente dalla (4) un'espressione di γ_P valida per temperature maggiori di quella caratteristica di Debye, evitando le complicazioni formali dovute alla presenza delle funzioni che caratterizzano la distribuzione quantistica di energia in un insieme di oscillatori.

Ammettendo quindi che la distribuzione di energia sia quella classica, e separando i termini relativi all'energia elastica da quelli corrispondenti alla energia cinetica, l'equazione di stato assume la forma (4)

$$(13) \quad P(V, T) = P_1^{(0)} \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) + P_2^{(0)} \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right)^2 + \frac{3NkT\gamma_T}{V},$$

dove $P_1^{(0)}$ e $P_2^{(0)}$ sono delle costanti.

(4) Cfr. J. C. SLATER: loc. cit. nota (1), p. 217.

L'espressione (8) della compressibilità isoterma si specializza quindi in

$$(14) \quad \frac{1}{\chi_r} = V \left\{ \frac{P_1^{(0)}}{V_0} + 2 \frac{P_2^{(0)}}{V_0} \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) - 3NkT \left[\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \gamma_r}{\partial V} \right)_T - \frac{\gamma_r}{V^2} \right] \right\}.$$

Tenendo conto della (11) si ha

$$(14') \quad \frac{1}{\chi_r} = P_1^{(0)} \frac{V}{V_0} + 2P_2^{(0)} \frac{V}{V_0} \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) - \frac{3NkT}{V} (2\gamma_r^2 - \gamma_r).$$

Derivando a volume costante la (6) rispetto a T , si ha esattamente

$$(15) \quad \left(\frac{\partial \log \nu}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \frac{1}{\chi_r}}{\partial T} \right)_V.$$

E valendosi della (14') e della (12) si ricava

$$(16) \quad \left(\frac{\partial \log \nu}{\partial T} \right)_V = -\frac{3Nk\gamma_r\chi_r}{2V} [2\gamma_r - 1 + 2\alpha T(4\gamma_r - 1)(\gamma_p - \gamma_r)].$$

In generale tra γ_r , χ_r , c_v ed α sussiste la relazione ⁽⁵⁾

$$(17) \quad \alpha = \frac{c_v \cdot \gamma_r \cdot \chi_r}{V_0},$$

la quale, ad alta temperatura, assume la forma

$$(17') \quad \chi = \frac{3Nk \cdot \gamma_r \cdot \chi_r}{V_0}.$$

Si può semplificare la (16) sostituendo in essa la (17') ed osservando che a derivazioni effettuate è lecito confondere, con buona approssimazione, V con V_0 . Sostituendo poi nella (4) la (16) così modificata, si ha la espressione cercata di γ_p :

$$(18) \quad \gamma_p = \gamma_r + \frac{2\gamma_r - 1}{2 - 2\alpha T(4\gamma_r - 1)},$$

⁽⁵⁾ Cfr. J. C. SLATER: loc. cit. nota (1), p. 219.

dalla quale si ricava immediatamente per β

$$(19) \quad \beta = \alpha \left[\gamma_T + \frac{2\gamma_T - 1}{2 - 2\alpha T(4\gamma_T - 1)} \right].$$

4. — Espressione generale di γ_P .

Per ottenere un'espressione di γ_P valida — a differenza della (18) — senza limitazioni di temperatura, occorre partire invece che dalla (13) da una equazione di stato nella quale si tenga conto della quantizzazione dell'energia spettante ai singoli modi di vibrazione del solido.

Assumendo come distribuzione statistica di frequenze quella proposta da Debye, e tenendo inoltre conto delle differenze tra le velocità di propagazione delle onde trasversali e longitudinali in modo da introdurre tre temperature caratteristiche $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta_3$, ognuna associata con un tipo di onde, l'equazione di stato assume la forma

$$(20) \quad P(V, T) = P_1^{(0)} \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) + P_2^{(0)} \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) + \frac{NkT\gamma_T}{V} \cdot \sum_{\tau=1}^3 D \left(\frac{\vartheta_\tau}{T} \right),$$

dove

$$D \left(\frac{\vartheta_\tau}{T} \right) = D(x_\tau) = \frac{3}{x_\tau^3} \int_0^{x_\tau} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

e inoltre $x = h\nu/kT$; $x_\tau = h\nu_\tau/kT = \vartheta_\tau/T$; ν_τ = autofrequenza massima del tipo di vibrazione considerato; h, k = costanti di Planck e di Boltzmann.

Derivando la (20) rispetto a V a temperatura costante, e tenendo conto della (11) si ha

$$(21) \quad \frac{1}{\chi_T} = P_1^{(0)} \frac{V}{V_0} + 2P_2^{(0)} \frac{V}{V_0} \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) - \frac{NkT}{V} \sum_{\tau=1}^3 \left[(5\gamma_\tau^2 - \gamma_T) D(x_\tau) - \gamma_\tau^2 \frac{3x_\tau}{e^{x_\tau} - 1} \right].$$

Come è naturale, ad alta temperatura la (21) si riduce proprio alla (14) quando si ponga $D(x_\tau) \approx x_\tau/(e^{x_\tau} - 1) \approx 1$.

Analogamente a quanto si è fatto per la (14) occorre derivare la (21) rispetto a T a volume costante.

Si può innanzi tutto osservare che è:

$$(22) \quad \left(\frac{\partial x_\tau}{\partial T} \right)_V = \frac{h}{kT} \left(\frac{\partial \nu_\tau}{\partial T} \right)_V - \frac{h\nu_\tau}{kT^2} = x_\tau \left[\left(\frac{\partial \log \nu}{\partial T} \right)_V - \frac{1}{T} \right].$$

Dalle (12), (15), (17), (21), (22) si ha allora:

$$(23) \quad \left(\frac{\partial \log \nu}{\partial T} \right)_v = - \frac{M + 2\alpha T(\gamma_p - \gamma_\tau) \cdot Q}{1 - L \cdot T},$$

essendosi posto per brevità:

$$(24) \quad \begin{cases} L = \frac{Nk\chi_r\gamma_\tau}{2V} \cdot \sum_{\tau}^3 \left[3 \cdot (5\gamma_\tau - 1) \cdot D(x_\tau) - (4\gamma_\tau - 1) \frac{3x_\tau}{e^{x_\tau} - 1} - \gamma_\tau \frac{3x_\tau^2 e^{x_\tau}}{(e^{x_\tau} - 1)^2} \right], \\ M = \frac{Nk\chi_r\gamma_B}{2V} \cdot \sum_{\tau}^3 \left[4 \cdot (5\gamma_\tau - 1) \cdot D(x_\tau) - (5\gamma_\tau - 1) \frac{3x_\tau}{e^{x_\tau} - 1} - \gamma_\tau \frac{3x_\tau^2 e^{x_\tau}}{(e^{x_\tau} - 1)^2} \right], \\ Q = \frac{Nk\chi_r\gamma_\tau}{2V} \cdot \sum_{\tau}^3 \left[(10\gamma_\tau - 1) \cdot D(x_\tau) - \gamma_\tau \frac{6x_\tau}{e^{x_\tau} - 1} \right]. \end{cases}$$

Dalla (4) si ricava quindi la relazione generale tra γ_p e γ_τ

$$(25) \quad \gamma_p = \gamma_\tau + \frac{M}{\alpha[1 - T \cdot (L + 2Q)]}.$$

Al crescere di T le x_τ tendono a zero, e le tre funzioni L , M , Q , definite dalle (24), hanno come limiti le espressioni:

$$(26) \quad \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} L = 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} M = \frac{3Nk\chi_r\gamma_\tau}{2V} (2\gamma_\tau - 1), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} Q = \frac{3Nk\chi_r\gamma_\tau}{2V} (4\gamma_\tau - 1), \end{cases}$$

le quali, sostituite nella (25), danno proprio la (18) già calcolata direttamente.

A bassa temperatura le funzioni $x_\tau/(e^{x_\tau} - 1)$ e $x_\tau^2 e^{x_\tau}/(e^{x_\tau} - 1)^2$ risultano infinitesime di ordine superiore ⁽⁶⁾ rispetto a

$$(27) \quad D(x_\tau) = \frac{\pi^4}{5} \frac{1}{x_\tau^3} + \dots .$$

⁽⁶⁾ Per lo sviluppo di $D(x_\tau)$ cfr. ad esempio: J. E. MAYER e M. G. MAYER: *Statistical mechanics* (London, 1946), p. 253.

Le funzioni L , M , T , al tendere di T a zero, hanno quindi come limite

$$(28) \quad \begin{cases} \lim_{T \rightarrow 0} L = \frac{3Nk\chi_T\gamma_T}{2V} \cdot \frac{k^3 T^3}{h^3} \cdot \frac{\pi^4}{5} \cdot (5\gamma_T - 1) \cdot \sum_{\tau}^3 \frac{1}{\nu_{\tau}^3}, \\ \lim_{T \rightarrow 0} M = \frac{4Nk\chi_T\gamma_T}{2V} \cdot \frac{k^3 T^3}{h^3} \cdot \frac{\pi^4}{5} \cdot (5\gamma_T - 1) \cdot \sum_{\tau}^3 \frac{1}{\nu_{\tau}^3}, \\ \lim_{T \rightarrow 0} Q = \frac{Nk\chi_T\gamma_T}{2V} \cdot \frac{k^3 T^3}{h^3} \cdot \frac{\pi^4}{5} \cdot (10\gamma_T - 1) \cdot \sum_{\tau}^3 \frac{1}{\nu_{\tau}^3}. \end{cases}$$

Introducendo una frequenza ν_* intermedia tra le frequenze massime ν_{τ} che corrispondono ai diversi tipi di vibrazioni, e definita da

$$(29) \quad \frac{3}{\nu_*^3} = \sum_{\tau}^3 \frac{1}{\nu_{\tau}^3},$$

e sostituendo le (28) e (29) nella (25) si ricava per γ_P l'espressione:

$$(30) \quad \gamma_P = \gamma_T + \frac{\frac{5\gamma_T - 1}{2} - \frac{5\alpha T}{4}(7\gamma_T - 1)}{\frac{5\alpha T}{4}(7\gamma_T - 1)},$$

valida per T minore della più piccola tra le temperature caratteristiche del solido.

5. – Confronto con i dati sperimentali.

I valori sperimentali di β e di α che si conoscono, corrispondono in generale a temperature superiori a quelle caratteristiche. Nella maggior parte dei casi per confrontare i risultati del calcolo con i dati dell'esperienza ci si può quindi servire direttamente della (18) anziché dell'espressione generale (25). Risolvendo la (18) rispetto a γ_T , e trascurando il prodotto αT rispetto all'unità, si ha

$$(31) \quad \gamma_T = \frac{1 + 2\beta T - \sqrt{1 + 4\beta^2 T^2 - 2\alpha T}}{4\alpha T} \approx \frac{2\beta + \alpha - 2\beta^2 T}{4\alpha}$$

Mediante la (31) si è calcolato il valore di γ_T , corrispondente ad una temperatura di 300 °K per cinque metalli di cui si conoscono α e β con sufficiente precisione. Nella tabella I i valori ottenuti in tal modo sono disposti nella colonna indicata con β , in modo da poter essere confrontati con quelli otte-

TABELLA I. — Confronto tra i valori di γ_T calcolati mediante la (31) a 300 °K, e quelli calcolati con altri metodi.

Metallo	γ_T				θ (°K)
	(β)	(GRÜNEISEN)	(C evapora- zione)	(Compressi- bilità)	
Pb	3,22	2,73	—	2,42	88
Cd	2,5	—	3,35	3,04	160
Mg	1,45	—	2,15	1,62	290
Cu	1,62	1,96	2,13	1,90	315
Al	1,97	2,17	2,05	1,27	398

nuti con procedimenti di calcolo diversi e cioè mediante la relazione tra α e γ_T dovuta a GRÜNEISEN, oppure mediante la relazione tra γ_T ed il calore latente di evaporazione, o infine mediante i valori sperimentali della compressibilità rilevata a temperatura ambiente in funzione del volume (?). L'accordo si rivela soddisfacente, in quanto le differenze tra i valori di γ_T ottenuti con i diversi metodi per uno stesso metallo, sono abbastanza piccole rispetto a quelle che la stessa γ_T subisce, in base alla (12), al variare della temperatura.

Un altro controllo della teoria svolta può essere effettuato osservando che, per la (19), β diviene infinita alla temperatura T_* che soddisfa alla relazione

$$(32) \quad T_* = \frac{1}{\alpha(4\gamma_T - 1)}.$$

Se le ipotesi poste a base della teoria riproducono con sufficiente approssimazione l'effettivo comportamento dei solidi, il valore di T_* definito dalla (32) non deve riuscire inferiore alla temperatura di fusione T_f né superiore a quella di ebollizione T_{eb} . Nella tabella II sono riportati i valori di T_* calcolati per tutti quei metalli di cui si conoscono γ_T ed α ; per quest'ultima grandezza va preso — con un'eventuale estrappolazione — il valore limite per T tendente a T_f dalla parte del solido (*). Nonostante le grandi differenze dei valori di α relativi al gruppo di metalli considerati (da $258 \cdot 10^{-6}$ per il Rubidio a $45 \cdot 10^{-6}$ per il Platino) e le altrettanto grandi differenze tra i valori di T_f (da 311 °K per il Rubidio a 2046 °K per il Platino) la temperatura T_* riesce in ogni caso compresa tra T_f e T_{eb} , anche quando — come accade per il Magnesio — tale intervallo è abbastanza ristretto.

(?) Cfr. J. C. SLATER: loc. cit. nota (1), pagg. 451, 454.

(*) Ci si è serviti a tale scopo dei valori di α forniti in funzione di T da: LANDOLT-BÖRNSTEIN: *Physikalisch-Chemische Tabellen* (Berlin, 1936); dalle *International Critical Tables* (New York, 1933) e dalle *Tables annuelles internationales de constantes et données numériques* (Paris).

TABELLA II. — Confronto tra la temperatura T_* ; alla quale β diviene infinita, e le temperature di fusione e di ebollizione di alcuni metalli.

Metallo	α (°K) $^{-1}$	γ_T	T_f (°K)	T_* (°K)	T_{eb} (°K)
Rb	$258 \cdot 10^{-6}$	1,48	311	760	97
Na	187	1,55	370	1 000	1 153
Cd	114	3,20	594	740	1 040
Pb	102	2,70	600	1 000	1 893
Zn	114	2,68	693	900	1 180
Mg	120	1,89	924	1 250	1 383
Al	102	1,85	933	1 530	2 073
Ag	66	2,38	1 233	1 750	2 223
Au	50	2,81	1 336	1 950	2 873
Cu	70	2,00	1 356	2 050	2 573
Ni	55	2,07	1 753	2 420	3 270
Fe	75	1,82	1 808	2 150	3 273
Pt	45	2,82	2 046	2 200	4 573

Si possono inoltre confrontare i valori sperimentali di β con quelli calcolati mediante la (19) considerando in via approssimata γ_T come una costante. Nella fig. 2 il confronto è stato eseguito nel caso del Piombo, per il quale si hanno valori sperimentali di β relativi ad un campo di temperature particolarmente vasto (9).

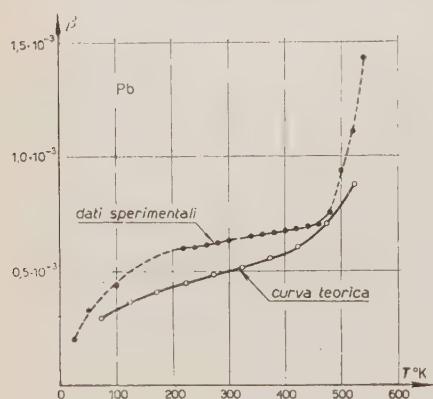


Fig. 2. — Dipendenza da T del coefficiente β relativo al piombo.

L'andamento della curva che unisce i valori sperimentali riportati in corrispondenza alle rispettive temperature, è abbastanza prossimo a quello della curva teorica: in quest'ultima tuttavia le variazioni di β con la temperatura appaiono necessariamente meno brusche che nella curva sperimentale, essendosi limitato lo sviluppo dell'equazione di stato ai soli termini del 2º ordine.

In un precedente lavoro (10) si è osservato che nei pressi dello zero as-

(9) Cfr. P. G. BORDONI e M. NUOVO: *Misure di velocità delle onde elastiche nei solidi a temperatura elevata* (in corso di pubblicazione).

(10) Cfr. P. G. BORDONI: loc. cit. nota (2).

soltanto le variazioni di frequenza, come quelle di compressibilità debbono essere infinitesime del 4° ordine rispetto alle variazioni di temperatura. La (30) consente di confermare e precisare tale osservazione; moltiplicando infatti ambo i membri per α si ha:

$$(33) \quad \beta = \alpha \left[\gamma_r + \frac{\frac{5\gamma_r - 1}{2} - \frac{5\alpha T}{4(7\gamma_r - 1)}}{2 - \frac{5\alpha T}{4(7\gamma_r - 1)}} \right] \approx \frac{\alpha}{2} (7\gamma_r - 1).$$

Dalla definizione di β e dello sviluppo di α ⁽¹¹⁾ si ricava

$$(34) \quad \left(\frac{\partial \log \nu}{\partial T} \right)_p = - \frac{3Nk\chi_r\gamma_r}{2V_0} \cdot \frac{4\pi^4}{5} (7\gamma_r - 1) \left(\frac{T}{\vartheta_*} \right)^3,$$

dove ϑ_* è la temperatura caratteristica corrispondente al valore di ν_* dato dalla (29). Integrando lungo una trasformazione a pressione costante, indicando con ν_0 il valore limite di ν corrispondente allo zero assoluto, e sviluppando in serie l'esponenziale si trova

$$(35) \quad \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{3Nk\vartheta_*\chi_r\gamma_r}{2V_0} \frac{\pi^4}{5} (7\gamma_r - 1) \left(\frac{T}{\vartheta_*} \right)^4.$$

Nei pressi dello zero assoluto ($\nu_0 - \nu$) varia proprio come T^4 e le proprietà fisiche del solido considerato sono sintetizzate in un unico coefficiente, mentre la legge di variazione ha lo stesso andamento per tutti i solidi, purchè sia riferita al rapporto tra la temperatura assoluta e la temperatura caratteristica.

6. – Conclusioni.

Tra le variazioni subite dalle autofrequenze di un solido rispettivamente a temperatura ed a pressione costante è possibile stabilire una relazione teorica la quale consente il calcolo delle prime, che non sono direttamente accessibili all'esperienza, in funzione delle seconde, le quali sono invece facilmente misurabili.

Si ha così una nuova maniera per calcolare il coefficiente di Grüneisen, ed i valori ottenuti risultano in buon accordo con quelli che si ricavano per altra via. È pure possibile seguire le piccole variazioni che il coefficiente stesso subisce al variare della temperatura e del volume. Le considerazioni teoriche

(11) Cfr. J. E. MAYER e M. G. MAYER: loc. cit. nota (9), p. 254.

svolte consentono inoltre di ricavare una legge di dipendenza delle auto-frequenze dalla temperatura valida senza restrizioni per quest'ultima; tale legge risulta soddisfacentemente prossima a quella fornita dall'esperienza.

S U M M A R Y

The Grüneisen coefficient $\gamma_T = -(\partial \log \nu / \partial \log V)_T$ can be obtained only from indirect measurements. A general relation is derived from the equation of state of solids, giving γ_T in terms of the analogous coefficient $\gamma_P = -(\partial \log \nu / \partial \log V)_P$ which can be easily measured. The formula (25) holds for any values of volume and temperature, the coefficients L, M, Q , being given by (24). At temperatures higher than Debye's critical value the above formula can be considerably simplified, and reduces to (18). The same happens at very low temperatures, the relation between γ_P and γ_T being then (30). Solving (18) with respect to γ_T , the Grüneisen coefficient can be computed from experimental data on frequency changes, and the values calculated agree satisfactorily with those obtained in different ways, as it is shown in Table I. The above theory gives also the values of $\beta = -(\partial \log \nu / \partial T)_P$ as a function of temperature and volume, a comparison with the experimental data being made in fig. 1. At very low temperatures, as it was observed in a previous paper, the frequency changes are found to be exactly proportional to the fourth power of temperature.

Sezione d'urto totale di alcuni elementi per neutroni di 14 MeV.

M. AGENO, G. CORTELLESSA e R. QUERZOLI

Istituto Superiore di Sanità, Laboratorio di Fisica - Roma

(ricevuto il 15 Gennaio 1953)

Riassunto. — Si descrive un procedimento per la misura di sezioni d'urto totali per neutroni di 14 MeV, che permette di correggere in modo soddisfacente i dati di trasmissione per i neutroni lenti diffusi. Le condizioni geometriche sono tali da ridurre al minimo le correzioni di carattere geometrico. Con tale procedimento si misurano le sezioni d'urto totali e i raggi nucleari efficaci di un gruppo di elementi, tra i quali alcuni i cui raggi nucleari, secondo precedenti determinazioni di altri Autori, scarterebbero sensibilmente dall'andamento medio in funzione del numero di massa. Non si trova, nei limiti degli errori sperimentali che sono del 2% circa, nessuna deviazione sistematica dalla nota legge, che esprime la densità costante della materia nucleare, e i risultati ottenuti sono in buono accordo con la teoria statistica di Feshbach e Weisskopf.

1. — Introduzione.

Uno dei metodi più semplici per la determinazione dei raggi nucleari si basa, com'è ben noto, sulla misura delle sezioni d'urto totali (assorbimento + sparpagliamento elastico) dei nuclei in questione per neutroni veloci^(1,2).

Una trattazione elementare della questione parte dall'ipotesi che il nucleo bombardato si possa schematizzare come una sfera di raggio R , molto maggiore della lunghezza d'onda λ dei neutroni incidenti e tale che assorba completamente i neutroni che attraversano la sua superficie mentre non assorbe

(¹) J. M. BLATT e V. F. WEISSKOPF: *The Theory of Nuclear Reactions*, in *Technical Report N. 42* (1950), M.I.T.

(²) D. CURIE: *Journ. de Phys. et le Rad.*, **12**, 941 (1951).

affatto quelli che passano nelle sue vicinanze. In questo caso, valendo la relazione:

$$(1) \quad \lambda \ll R,$$

trattando il fenomeno in modo semiclassico e supponendo nullo il potere riflettente della barriera di potenziale nucleare, si trova che la sezione d'urto totale σ_t è data dalla formula:

$$(2) \quad \sigma_t = \sigma_{sp} + \sigma_a = 2\pi(R + \lambda)^2,$$

mentre le due sezioni d'urto per sparpagliamento elastico σ_{sp} e per assorbimento σ_a risultano uguali tra loro e a $\pi(R + \lambda)^2$ (teorema ottico di Bohr, Peierls e Placzek) ^(3,4).

Le condizioni sotto le quali è valida la relazione (2), che lega il raggio del nucleo alla sezione d'urto totale per neutroni veloci, sono sostanzialmente le seguenti.

a) Occorre innanzi tutto che l'energia E dei neutroni incidenti sia sufficientemente elevata, affinchè la loro lunghezza d'onda efficace:

$$(3) \quad \lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{A+1}{A} \cdot \frac{4,55 \cdot 10^{-13}}{E^{1/2}},$$

(E in MeV, A numero di massa del nucleo urtato) soddisfi la (1). Siccome i raggi nucleari sono compresi tra circa $2 \cdot 10^{-13}$ e circa $8 \cdot 10^{-13}$ cm, ciò in pratica può avversi solo per neutroni di almeno una decina di MeV. È da prevedersi che per queste energie le particolarità della struttura interna dei nuclei non abbiano più una sensibile influenza sui valori della sezione d'urto totale, che quindi resulterà una funzione regolare del numero di massa.

b) Occorre inoltre che l'energia dei neutroni incidenti non superi il limite oltre il quale il nucleo non si può più schematizzare come una sfera completamente assorbente. Ciò evidentemente avviene quando un neutrone dell'energia considerata ha una probabilità non trascurabile di attraversare il nucleo senza interagire con nessuna delle particelle nucleari. Una valutazione grossolana del cammino libero medio dei neutroni nella materia nucleare ⁽⁵⁾ mostra che già verso i 70 MeV la trasparenza del nucleo deve risultare tutt'altro che trascurabile.

⁽³⁾ N. BOHR, R. PEIERLS e G. PLACZEK: *Nature*, **144**, 200 (1939).

⁽⁴⁾ H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **57**, 1125 (1939).

⁽⁵⁾ S. FERBACH, R. SERBER e T. B. TAYLOR: *Phys. Rev.*, **75**, 1352 (1949).

La schematizzazione che è alla base di questa prima trattazione elementare del fenomeno d'urto non è però, com'è noto, molto coerente, poichè qualunque barriera o gradino di potenziale ha sempre un coefficiente di riflessione diverso da zero.

Una trattazione più raffinata, che tiene conto della riflessione parziale della funzione d'onda alla superficie del nucleo, è stata fatta da FESHBACH e WEISSKOPF⁽⁶⁾. Essi assumono che all'interno del nucleo la funzione d'onda sia costituita esclusivamente da onde convergenti (assorbimento totale) ed impongono come condizione al contorno la continuità della derivata logaritmica della ψ sulla superficie del nucleo.

Da tale trattazione risulta che la (2) non è in realtà mai valida altro che in una prima grossolana approssimazione. La sezione d'urto totale tende effettivamente al valore limite $2\pi R^2$, come vuole il teorema ottico, ma tale valore asintotico è praticamente raggiunto solo per altissimi valori dell'energia, per i quali d'altra parte la trasparenza del nucleo (che la teoria di Weisskopf non prende in considerazione) non è più trascurabile. Alle energie intermedie (per $R > 4\lambda$) i valori calcolati da WEISSKOPF scartano da quelli calcolati secondo la (2) dell'ordine del 10%.

La connessione tra sezioni d'urto totali per neutroni veloci e raggi nucleari non è dunque così immediata come vuole la teoria elementare. Resta per altro il fatto che sono da questo punto di vista da prendere in considerazione solo le misure di σ_t fatte ad energie non molto superiori ai 10 MeV, mentre le misure eseguite ad energie prossime o superiori ai 100 MeV potranno per confronto dare informazioni sulla trasparenza dei nuclei⁽⁷⁻⁵⁾.

Misure di sezioni d'urto totali, nel campo di energie intermedie dove la trasparenza presumibilmente non gioca, sono state fatte con vari elementi da SHERR⁽⁸⁾ con neutroni di 25 MeV, e da AMALDI e coll.⁽⁹⁻¹²⁾ e più recentemente da LASDAY⁽¹³⁾ con neutroni di circa 14 MeV. Tutti questi Autori deducono dai valori misurati delle sezioni d'urto i raggi nucleari efficaci me-

⁽⁶⁾ H. FESHBACH e V. F. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **76**, 1550 (1949).

⁽⁷⁾ R. SERBER: *Phys. Rev.*, **72**, 1114 (1947).

⁽⁸⁾ R. SHERR: *Phys. Rev.*, **68**, 240 (1945).

⁽⁹⁾ E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. N. CACCIAPUOTI e G. C. TRABACCHI: *Rend. Lincei*, **1**, 29 (1946).

⁽¹⁰⁾ E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. N. CACCIAPUOTI e G. C. TRABACCHI: *Nuovo Cimento*, **3**, 15 (1946).

⁽¹¹⁾ E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. N. CACCIAPUOTI e G. C. TRABACCHI: *Nuovo Cimento*, **3**, 203 (1946).

⁽¹²⁾ E. AMALDI, B. N. CACCIAPUOTI: *Phys. Rev.*, **71**, 739 (1947).

⁽¹³⁾ A. H. LASDAY: *Phys. Rev.*, **81**, 139 (1951).

diante la formula:

$$(4) \quad R' = \left(\frac{\sigma_t}{2\pi} \right)^{1/2},$$

raggi che, secondo i calcoli di WEISSKOPF, attorno a $R = 4\lambda$ differiscono dai raggi nucleari effettivi per circa il 20% in eccesso. L'andamento generale dei raggi nucleari efficaci, così calcolati in funzione del numero di massa si può rappresentare abbastanza bene con:

$$(5) \quad R' = r_0 A^{1/3} + b,$$

ove i valori più convenienti delle costanti sembrano essere (14):

$$r_0 = 1,37 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \quad b = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Ciò costituisce una conferma del fatto, già noto per altra via, che la densità della materia nucleare si mantiene molto sensibilmente costante; b avrebbe il significato di raggio d'urto efficace del nucleone incidente.

Secondo WEISSKOPF, la relazione corretta tra sezioni d'urto totali e raggi nucleari sarebbe invece del tipo:

$$(6) \quad R = \left(\frac{\sigma_t}{2\pi} \right)^{1/2} - \delta,$$

ove δ non è una costante, ma una funzione dell'energia dei neutroni e del numero di massa del nucleo urtato, che per energie molto elevate o per elementi molto pesanti viene sostanzialmente a coincidere con λ . Per $R = 8\lambda$ è già praticamente $\delta \simeq \lambda$, mentre se $R/\lambda < 8$ risulta: $\lambda > \delta > 0$.

Riportando quindi in un grafico in ascisse $A^{1/3}$ e in ordinate R' , i punti corrispondenti ai vari nuclei non dovrebbero disporsi lungo una retta del tipo (5), ma, se la densità della materia nucleare è costante, lungo una curva regolare, rivolgente la sua concavità verso l'asse delle ascisse:

$$(7) \quad R' = r_0 A^{1/3} + \delta.$$

La tangente a questa curva nella zona degli elementi pesanti deve staccare sull'asse delle ordinate un segmento pari a λ .

Se tuttavia si esaminano un po' in dettaglio le misure di SHERR, AMALDI e LASDAY, si vede che le misure dei raggi nucleari di taluni elementi hanno dato risultati che scartano dall'andamento medio per assai di più di quanto sarebbe da aspettarsi sulla base del solo errore statistico. Tra gli elementi che

scartano sono, per esempio, il berillio, lo zolfo (11), lo zirconio (13), e il piombo (11,13).

Si è tentato di mettere questi scarti in relazione con la costituzione interna dei vari nuclei e in particolare con l'esistenza all'interno di essi di «shell» complete di protoni e neutroni (11-13-15). LASDAY, per esempio, attribuisce i valori bassi trovati per le sezioni d'urto dello zirconio e del piombo alla presenza degli isotopi $_{40}\text{Zr}^{50}$ con 50 neutroni e $_{82}\text{Pb}^{208}$ con 126 neutroni e 82 protoni.

È per altro da osservare che il raggio nucleare del berillio, che nelle misure di AMALDI scarta per difetto, scarta invece per eccesso nelle misure di LASDAY e che, come già si è detto, per energie dei neutroni incidenti di 14 MeV l'influenza della struttura interna del nucleo dovrebbe essere ormai completamente trascurabile. Inoltre, se si esamina, per esempio, l'andamento della sezione d'urto totale dello zolfo in funzione dell'energia dei neutroni (16) si vede che il punto di Amaldi a 14 MeV molto probabilmente scarta per difetto dall'andamento medio individuato dalle misure ad energie di qualche MeV e di 50 MeV.

Essendo comunque importante stabilire con certezza se gli scarti osservati sono reali oppure dovuti ad errori di misura, ci siamo proposti di riesaminare la questione, tenuto anche conto del fatto che l'aumento per più che un fattore 10 del flusso di neutroni ottenibile col nostro impianto a 1100 kV (17) permette oggi di eseguire misure di sezioni d'urto totale in condizioni geometriche assai migliori che per il passato.

Una parte dei risultati da noi ottenuta è stata presentata al Congresso della S.I.F., in Bergamo (24-27 Settembre 1952) e pubblicata in una breve nota preliminare (18).

2. - Misure preliminari.

I neutroni di cui abbiamo fatto uso nelle nostre misure sono quelli del gruppo di energia massima emessi nella reazione $\text{Li}^7(\text{d}, \text{n})\text{Be}^8$. L'energia libera in questo processo (19) è di 15,03 MeV, a cui corrisponde per i neutroni

(14) L. J. COOK, E. M. McMILLAN, J. M. PETERSON e D. C. SEWELL: *Phys. Rev.*, **75**, 7 (1949).

(15) E. AMALDI: *Diffraction Effects in the Scattering of Neutrons, Mesons and Electrons by Nuclei*, in *Ripon Lectures* (1951), in press.

(16) R. K. ADAIR: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 249 (1950).

(17) M. AGENO, M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI: *Rend. Ist. Sup. Sanità*, **14**, 509 (1951).

(18) M. AGENO, G. CORTELESSA e R. QUERZOLI: *Rend. Acc. Lincei*, **13**, fasc. 5 (1952).

(19) W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON e W. A. FOWLER: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 291 (1950).

emessi a 90° dalla direzione dei deutoni incidenti di 0,7 MeV⁽²⁰⁾ un'energia di 13,83 MeV. Siccome però in questa reazione vengono emessi contemporaneamente anche diversi altri gruppi di neutroni di energia inferiore⁽²¹⁾, è necessario che in misure di questo tipo il sistema di rivelazione dei neutroni sia tale da discriminare tra i neutroni di energia prossima a 14 MeV e quelli di energia inferiore emessi dalla targhetta o diffusi elasticamente dalle pareti e dagli oggetti circostanti.

Ciò si può ottenere in due modi. Si possono infatti rivelare i neutroni tramite i protoni di rinculo emessi da uno straterello di un'opportuna sostanza idrogenata, selezionando mediante contatori proporzionali in coincidenza ed anticoincidenza ed opportuni assorbitori solo i protoni compresi nell'intervallo di energia che interessa. Questo è, ad esempio, il metodo usato da LASDAY⁽¹³⁾.

Il secondo metodo consiste nel far sì che i neutroni veloci da rivelare producano una reazione nucleare che presenti una soglia ad un'opportuna energia (nel nostro caso tra i 10 e i 14 MeV) dando luogo ad un nucleo radioattivo β . La radioattività beta indotta permette allora una misura del numero dei neutroni veloci incidenti sul rivelatore. Questo secondo metodo, usato da SHERR e da AMALDI⁽¹¹⁾ ha sul primo il vantaggio di essere tecnicamente assai più semplice, di evitare a priori ogni perturbazione degli apparati di misura da parte dell'impianto acceleratore, e permette anche, mediante ovvi artifici, di ottenere delle intensità più elevate senza peggiorare le condizioni geometriche dell'irraggiamento. Per questi motivi, abbiamo preferito il metodo della soglia a quello dei protoni di rinculo.

Per ciò che riguarda la scelta del rivelatore, abbiamo preso in esame l'argento, l'antimonio e il rame, nei quali i neutroni veloci danno luogo a reazioni ($n, 2n$) con soglia rispettivamente a 9,6 MeV, 9,25 MeV e 10,9 MeV⁽²²⁾. Nell'argento e nell'antimonio le sezioni d'urto per questo processo sono circa doppie che nel rame; è però da tener conto che in quest'ultimo elemento gli elettroni emessi nel successivo processo di disintegrazione sono assai più energici, di guisa che, con rivelatore spesso, si ottiene, a parità di irraggiamento, un'attività più intensa col rame che non, per esempio, con l'antimonio.

Tutti e tre gli elementi considerati presentano l'inconveniente di attivarsi sensibilmente anche con neutroni lenti, sicché i rivelatori fatti con essi sono in realtà sensibili non soltanto ai neutroni di energia superiore al valore di soglia, ma anche ai neutroni diffusi e rallentati dalle pareti e dagli oggetti circostanti la targhetta. Siccome le attività provocate dai neutroni lenti hanno periodi di dimezzamento sensibilmente diversi da quelli dipendenti dai processi ($n, 2n$), v'è in teoria la possibilità di separare i due effetti, analizzando

⁽²⁰⁾ E. AMALDI: *Appunti di fisica nucleare*, vol. I (1944-45), p. 96.

⁽²¹⁾ H. T. RICHARDS: *Phys. Rev.*, **59**, 796 (1941).

⁽²²⁾ B. L. COHEN: *Phys. Rev.*, **81**, 184 (1951).

opportunamente la curva di decadimento dell'attività indotta. In pratica, questa analisi può dare risultati attendibili solo se le due attività da separare hanno periodi di dimezzamento molto sensibilmente diversi. Da questo punto di vista quindi (23), il rame si presenta come meno opportuno dell'argento e dell'antimonio. Viceversa, l'argento e l'antimonio si attivano entrambi per neutroni lenti assai più del rame (24).

Il primo problema che ci siamo trovati di fronte è stato quindi quello di ridurre al minimo il numero dei neutroni lenti diffusi incidenti sul rivelatore e di trovare il procedimento più attendibile per correggere le attività misurate per tener conto dei neutroni lenti residui. La scelta del rivelatore dipende naturalmente dalla soluzione trovata per questi due problemi.

Dopo numerosi tentativi, abbiamo concluso che il sistema più efficace per ridurre l'attività dovuta ai neutroni lenti è, nel nostro caso, quello di schermare da ogni parte il solo rivelatore con circa 1 g/cm^2 di cadmio o di boro. La tab. I dà un esempio dei risultati ottenuti in una serie di misure eseguite

TABELLA I.

Schermo	N_{tot}	N_L	$N_v = N_{\text{tot}} - N_L$	N_L/N_v	N. lenti
—	$10,38 \pm 0,10$	$5,91 \pm 0,08$	$4,47 \pm 0,13$	1,32	16 %
Boro	$4,58 \pm 0,03$	$0,76 \pm 0,02$	$3,82 \pm 0,04$	0,20	2,3%
Cadmio	$5,77 \pm 0,06$	$1,09 \pm 0,04$	$4,68 \pm 0,07$	0,23	2,8%

usando come rivelatore un dischetto di rame del diametro di 3,5 cm e dello spessore di 2 mm, posto a 100 cm dalla targhetta, non schermato, oppure schermato con $1,15 \text{ g/cm}^2$ di cadmio, oppure ancora schermato con B_2O_3 contenente 1 g/cm^2 di boro. Per ciascun tipo di schermaggio sono stati fatti due irraggiamenti di 20^{m} ciascuno, il primo senza nessun assorbitore, il secondo interponendo a metà strada tra targhetta e rivelatore un cilindro di ottone del diametro di 4 cm e della lunghezza di 25 cm tale da ridurre a circa il 2,7 % i neutroni incidenti sul rivelatore e provenienti direttamente dalla targhetta. Dopo 1^{m} dalla fine di ogni irraggiamento, l'attività indotta nel rame è stata misurata con un contatore di Geiger a parete frontale ($\sim 2 \text{ mg/cm}^2$ di mica), leggendo il numero di impulsi di minuto in minuto, per un totale di 20^{m} . Le attività misurate sono state normalizzate per le variazioni d'inten-

(23) J. MATTAUCH e A. FLAMMERSFELD: *Isotopic Report* (Tübingen, 1949).

(24) F. E. SENFTLE e W. Z. LEAVITT: *Nucleonics* (May 1950), p. 54.

sità della corrente ionica da un irraggiamento all'altro, riferendole all'attività di un monitor, costituito da un dischetto di rame del diametro di 2 cm e dello spessore di 1 mm, schermato con B_2O_3 e posto a 10 cm dalla targhetta in condizioni standard, che veniva sempre irraggiato e misurato su di un secondo contatore di Geiger contemporaneamente al rivelatore.

Come controllo, si avevano le indicazioni dell'integratore della corrente ionica (25) che dovevano risultare proporzionali ai dati del monitor. Tutti gli irraggiamenti sono stati fatti a 0,7 MeV.

L'attività N_{tot} misurata senza assorbitore è evidentemente dovuta sia ai neutroni veloci di energia superiore agli 11 MeV, sia ai neutroni lenti diffusi. L'attività misurata con l'assorbitore di ottone N_L è invece dovuta praticamente ai soli neutroni lenti: ciò è confermato dal fatto che la curva di decadimento di questa attività mostra il periodo di dimezzamento di 5^m, senza traccia del periodo più lungo.

La differenza $N_{tot} - N_L$ rappresenta presumibilmente l'attività dovuta ai soli neutroni veloci. Le ultime due colonne della tab. I contengono il rapporto tra le due attività dovute ai neutroni lenti e ai neutroni veloci e il rapporto tra il numero dei neutroni lenti e il numero dei neutroni veloci, valutato tenendo conto delle vite medie e delle sezioni d'urto per i due processi (24).

Come si vede, le due schermature con boro e con cadmio sono pressoché equivalenti. Il boro riduce un po' di più la frazione di neutroni lenti, ma assorbe anche una frazione sensibile dei neutroni veloci. (Avvertiamo una volta per tutte che chiameremo nel seguito « veloci » i neutroni responsabili del processo $(n, 2n)$ nel rame e « lenti » i neutroni responsabili del processo (n, γ) , indipendentemente dalla loro effettiva energia). Essendo inoltre gli assorbitori di B_2O_3 dello spessore di circa 3 cm, bisognerà con essi prendere in esame l'influenza sulle misure di sezione d'urto dei neutroni diffusi elasticamente nello schermo. Tutte le misure di sezione d'urto totale sono state fatte, come vedremo, schermando i rivelatori con B_2O_3 .

Le attività contrassegnate con N_L nella tab. I sono, come si è detto, sicuramente dovute in modo praticamente totale ai neutroni lenti. Non è invece detto che le differenze $N_v = N_{tot} - N_L$ siano totalmente dovute ai neutroni veloci: in altre parole è possibile che la correzione eseguita sottraendo il fondo di neutroni lenti misurato con la barra di ottone non sia sufficiente. Per chiarire questo punto, abbiamo eseguito una serie di misure a varie distanze dalla targhetta, delle quali alcune sono raccolte nella tab. II.

Nella seconda e terza colonna di tale tabella sono riportate le intensità totali (dovute cioè sia ai neutroni veloci sia ai neutroni lenti), normalizzate al solito modo, misurate a varie distanze dalla targhetta con rivelatore rame, schermato

(25) R. QUERZOLI: *Rend. Ist. Sup. Sanità*, **14**, 792 (1951).

rispettivamente con boro e con cadmio. Nella quarta colonna sono riportate le intensità misurate, nelle identiche condizioni geometriche di irraggiamento e di normalizzazione, usando come rivelatore una lastrina di rodio schermata con boro. Questo elemento si attiva praticamente solo con neutroni lenti ed il suo periodo di dimezzamento di 4,34^m è sufficientemente vicino a quello di 5^m del rame, perchè lo si possa adoperare come rivelatore nelle identiche condizioni di irraggiamento. Per eliminare completamente il periodo più breve di 44^s l'attività indotta nel rodio è stata tuttavia sempre misurata per 20^m a partire da 3^m (anzichè da 1^m) dalla fine dell'irraggiamento.

TABELLA II.

D cm	N_{tot} (rivelatore Cu)		N_L (riv. Rh) sch. B	N_L	N_v	$\frac{D^2}{N_{20}^2}$
	sch. Cd	sch. B		riv. Cu	riv. Cu	
20,8	103,02 ± 0,37	90,11 ± 0,35	7,72 ± 0,13	6,83	83,28	83,28
40,8	26,65 ± 0,20	23,30 ± 0,17	2,46 ± 0,07	2,18	21,12	21,60
80,8	8,01 ± 0,12	6,80 ± 0,12	1,14 ± 0,06	1,01	5,79	5,52
100,8	5,77 ± 0,06	4,58 ± 0,03	1,08 ± 0,02	0,95	3,63	3,54
160,8	2,69 ± 0,07	2,20 ± 0,09	—	—	—	—

Siccome lo schermo di boro è tale da assorbire in modo pressochè completo i neutroni di risonanza del rodio, si può ritenere che l'attività misurata nel rodio sia dovuta esclusivamente a neutroni epitermici e che essa sia proporzionale a quella parte dell'attività del rame che è dovuta ai neutroni lenti. Non si può naturalmente affermare che lo spettro dei neutroni lenti diffusi sia esattamente lo stesso in tutti i punti dell'ambiente circostante la targhetta; è però ragionevole ritenere che eventuali piccole variazioni di spettro non alterino in modo sensibile la proporzionalità tra le attivazioni del rodio e del rame, dato l'andamento regolare delle due sezioni d'urto nell'intervallo di energia che interessa.

Il rapporto tra le due attivazioni è stato da noi misurato a em 100 dalla targhetta, assorbendo i neutroni veloci con l'assorbitore di ottone e facendo misure alternate con rivelatore rame e rivelatore rodio. Si è trovato in tal modo:

$$\begin{aligned} \text{rivelatore Cu:} & \quad 0,76 \pm 0,02, \\ \text{rivelatore Rh:} & \quad 0,86 \pm 0,02. \end{aligned}$$

Il rapporto è quindi:

$$\frac{\text{Attività Cu}}{\text{Attività Rh}} = 0,884 \pm 0,031.$$

La quinta colonna della tab. II contiene le attività per neutroni lenti del rivelatore rame, ottenute moltiplicando le attività misurate col rivelatore rodio per questo rapporto.

Detraendo i valori della quinta colonna dalle attività totali con rivelatore rame contenute nella colonna seconda, si ottengono i numeri della sesta colonna della tab. II, che rappresentano presumibilmente le attività del rame dovute ai soli neutroni veloci provenienti direttamente dalla targhetta. Infatti, come si vede, questi numeri variano con ottima approssimazione in ragione inversa del quadrato della distanza. A dimostrazione di ciò, nell'ultima colonna della tab. II sono stati calcolati i dati di intensità alle varie distanze, partendo dal dato a 20,8 cm e supponendo valida la legge del quadrato delle distanze: i numeri delle due ultime colonne concordano largamente tra loro, entro gli errori statistici.

Come ulteriore conferma, abbiamo analizzato la curva di decadimento dell'attività totale indotta nel rivelatore rame a 20,8 cm dalla targhetta. Da tale analisi risulta che l'attività imputabile al periodo di 5^m è il 6-7% dell'attività totale, in ottimo accordo coi dati della tab. II.

Gli unici dati che abbiamo trovato sistematicamente non concordanti sono le attività dovute ai neutroni lenti a 100 cm dalla targhetta, misurate con e senza l'assorbitore di ottone. La tab. III pone a confronto i risultati ottenuti con rivelatore rodio e con rivelatore rame. Il dato con rivelatore rame, senza assorbitore, è quello dedotto dalla misura fatta col rodio tenendo conto del rapporto delle attività del rame e del rodio.

TABELLA III.

Assorbitore	N_L (Rh)	N_L (Cu)
—	$1,08 \pm 0,02$	$(0,95 \pm 0,04)$
Ottone	$0,86 \pm 0,02$	$0,76 \pm 0,02$

Ci sembra quindi di poter affermare che il fondo di neutroni lenti misurato con la barra di ottone è minore di quello effettivamente presente in assenza di tale barra. Questo risultato è evidentemente assai importante ai fini delle misure di sezione d'urto totale, in quanto dimostra che la presenza di un assorbitore a 50 cm dalla targhetta altera in modo sensibile (e presumibilmente diverso a seconda del tipo dell'assorbitore) la distribuzione dei neutroni diffusi in tutto l'ambiente. Non è naturalmente escluso che i neutroni tolti dalla barra di ottone non provengano, in parte, direttamente dalla targhetta.

È però improbabile che ne provengano tutti, dato che essi vengono in parte soppressi anche dai vari assorbitori, ma con sezioni d'urto apparenti assai diverse da quelle note per neutroni lenti o epitermici.

Considerata dunque la situazione che risulta dall'insieme delle misure preliminari precedentemente discusse, ci sembra di poter concludere con una certa sicurezza quanto segue:

1) L'attività destata nel rivelatore rame dai soli neutroni lenti si può misurare direttamente soltanto nel caso che l'assorbitore (barra di ottone) sopprima praticamente tutti i neutroni veloci. Tale attività non è però uguale a quella, dovuta sempre ai neutroni lenti, che si ha senza assorbitore o con altri assorbitori.

2) L'attività destata nel rivelatore rodio è in ogni caso praticamente dovuta ai soli neutroni lenti ed è, almeno con buona approssimazione, proporzionale all'attività destata dagli stessi neutroni nel rivelatore rame.

Ne deriva la possibilità di misurare per ogni assorbitore i neutroni lenti col rodio e di risalire all'attività da essi destata nel rame, determinando una volta per tutte con precisione il rapporto rame/rodio, nelle nostre condizioni di ambiente e di irraggiamento, con misure alternate fatte con la barra di ottone.

Risulta inoltre dalle misure precedenti che a 100 cm dalla targhetta il fondo residuo di neutroni lenti è ancora tollerabile in confronto al numero dei neutroni veloci. Esso è però tale da escludere la possibilità di usare come rivelatore l'argento, a causa della sua grande sezione d'urto per neutroni lenti. L'unico vantaggio dell'antimonio sul rame, che è quello di permettere un'analisi più accurata delle curve di decadimento, perde poi ogni importanza se si adotta il metodo più preciso di correggere per i neutroni lenti con misure fatte col rodio. Il rame è dunque senz'altro il rivelatore più conveniente, tanto più che nell'antimonio si attiva sensibilmente, oltre ai periodi brevi di 1,3^m e 3,5^m anche il periodo lungo di 2,63^d, il che costringerebbe ad apportare alle misure una correzione in più con notevole scapito della precisione statistica.

3. – Metodo di misura.

Le condizioni geometriche da noi adottate in definitiva per le misure di sezione d'urto totale sono rappresentate in iscala nella fig. 1. La targhetta di litio T è stata mediante un diaframma di ferro ridotta al diametro massimo di 2,5 cm. Il monitor M è costituito da un dischetto di rame del diametro di cm 2 e dello spessore di mm 1, posto a 10 cm dall'asse della targhetta. Il rivelatore R è costituito da un disco di rame del diametro di 3,5 cm e dello spes-

sore di mm 2, posto a 100 cm dall'asse della targhetta. Sia il monitor sia il rivelatore sono protetti da scatole di ottone (spessore di parete mm 1) contenenti B_2O_3 , in modo da essere protetti in ogni direzione da almeno 1 g/cm^2 di boro. Il diffusore D è posto col suo asse a 50 cm dall'asse della targhetta ed è costituito da cilindri del materiale in esame del diametro di 3,5-4 cm e di lunghezza determinata dal valore della trasmissione che si vuol ottenere.

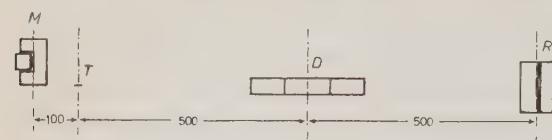


Fig. 1.

Ogni misura di sezione d'urto consta quindi di quattro misure successive, due con rivelatore rame e due con rivelatore rodio, comprendenti ciascuna un irraggiamento della durata di venti minuti e una misura dell'attività indotta eseguita con un contatore di Geiger, pure della durata di venti minuti a partire da I_0 (rame) o da I_0 (rodio) dalla fine dell'irraggiamento:

- 1) Misura dell'intensità neutronica senza diffusore, con rivelatore rame, I_0 (Cu).
- 2) Idem, con rivelatore rodio, I_0 (Rh).
- 3) Misura dell'intensità neutronica trasmessa dal diffusore, con rivelatore rame, I (Cu).
- 4) Idem, con rivelatore rodio, I (Rh).

Ad ogni misura il monitor e il rivelatore vengono irraggiati contemporaneamente e le rispettive attività sono poi misurate pure contemporaneamente, su due contatori distinti. Se s'indicano con M_0 ed M le indicazioni del monitor rispettivamente nella misura senza diffusore e in quella corrispondente con diffusore, le intensità normalizzate sono rispettivamente:

$$(8) \quad N_0 = \frac{I_0}{M_0}, \quad N = \frac{I}{M}.$$

Le intensità normalizzate N_0 (Cu) ed N (Cu), misurate con rivelatore rame vanno poi corrette per i neutroni lenti. Le rispettive correzioni sono:

$$(9) \quad L_0 = \alpha \cdot N_0(\text{Rh}), \quad L = \alpha \cdot N(\text{Rh}),$$

ove con α si è indicato il rapporto tra le attività normalizzate del rame e del rodio, misurate una volta per tutte con l'assorbitore di ottone.

La trasmissione del diffusore in esame è allora:

$$(10) \quad T = \frac{N - L}{N_0 - L_0},$$

e la relativa sezione d'urto

$$(11) \quad \sigma = \frac{1}{nx} \ln \left(\frac{1}{T} \right),$$

ove n è il numero di atomi del diffusore per unità di volume ed x la lunghezza di questo.

L'attendibilità del metodo dipende evidentemente in modo essenziale dalla costanza del rendimento dei contatori di Geiger impiegati per misurare l'attività indotta nel monitor e nel rivelatore, per tutta la durata di una serie di misure.

Per garantirci contro l'eventualità di una forzata sostituzione di un contatore nel corso di una serie di misure, ci siamo preoccupati di procurarci un dato proporzionale al rendimento del contatore (inclusa la trasmissione della finestra di mica), in modo da potere eventualmente normalizzare le misure eseguite con due contatori distinti. (Occorre dire che questa eventualità non si è mai verificata e che ogni serie di misure è stata eseguita con gli stessi due contatori).

A questo scopo, abbiamo irradiato coi neutroni emessi da una sorgente di 400 mg di radio mescolato a polvere di berillio e rallentati in un cilindro di paraffina, in condizioni geometriche e di irraggiamento esattamente definite, una lastrina d'argento e abbiamo misurata con molta precisione la attività indotta in essa con ciascun contatore. In questa misura di calibrazione, abbiamo scelto come sorgente di elettroni l'argento irradiato con neutroni lenti, perché l'energia degli elettroni emessi da esso è assai prossima all'energia dei positroni di Cu^{62} .

La costanza del rendimento dei singoli contatori nel corso delle misure è stata poi continuamente controllata misurando con essi l'attività di un dischetto standard di vetro all'uranio.

4. – Energia media dei neutroni e correzioni geometriche.

Per valutare la bontà delle nostre condizioni geometriche e calcolare le correzioni da apportare ai risultati per tener conto della geometria non ideale, occorre ricordare che l'angolo medio di diffusione elastica è dell'ordine di λ/R , essendo λ la lunghezza d'onda dei neutroni incidenti ed R il raggio del nucleo urtato. La lunghezza d'onda è, com'è noto, legata all'energia dei neutroni

dalla relazione (3). Occorre quindi innanzi tutto valutare l'energia media dei neutroni da noi usati.

Lo spettro dei neutroni emessi nella reazione $\text{Li}^7(\text{d}, \text{n})\text{Be}^8$, è stato studiato da RICHARDS nel 1941 (21). L'andamento della sezione d'urto del rame per il processo $(\text{n}, 2\text{n})$ in prossimità della soglia è stato studiato sperimentalmente da FOWLER e SLYE (26). I risultati di questi Autori non sono però del tutto convincenti, perché essi trovano un valore troppo elevato per l'energia di soglia. D'altra parte, considerazioni di carattere generale (27) mostrano che in prossimità della soglia la sezione d'urto per un processo $(\text{n}, 2\text{n})$ deve essere proporzionale al quadrato dell'energia in eccesso.

Abbiamo calcolato perciò l'energia media dei neutroni da noi usati mediante la formula:

$$(12) \quad E = \frac{\int_{E_0}^{E_{\max}} E \cdot \Phi \cdot (E - E_0)^2 dE}{\int_{E_0}^{E_{\max}} \Phi \cdot (E - E_0)^2 dE},$$

dove con Φ si è indicata l'ordinata della curva di Richards e con E_0 l'energia di soglia. All'energia media così calcolata abbiamo poi tolto $\frac{2}{3} \cdot 0,4 = 0,27$ MeV, per tener conto del fatto che lo spettro di Richards è ottenuto bombardando il litio con deutoni di 1,2 MeV, mentre i nostri irraggiamenti per la determinazione delle sezioni d'urto sono fatti a 0,8 MeV. Si è così trovato:

$$E = 13,4 \text{ MeV}.$$

Se si facesse uso dell'andamento della sezione d'urto trovata da FOWLER e SLYE si troverebbe per l'energia media un valore non molto diverso da questo.

La lunghezza d'onda dei neutroni da noi usati risulta dunque secondo la (3):

$$\lambda = \frac{A+1}{A} \cdot 1,24 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Siamo ora in grado di valutare la bontà delle nostre condizioni geometriche. I raggi nucleari degli elementi di peso atomico medio si aggirano attorno a $6 \cdot 10^{-13}$ cm. È dunque nel nostro caso: $\lambda/R \sim 0,21$ rad. Gli angoli sotto cui dal centro del diffusore sono visti la targhetta e il rivelatore rispettivamente

(26) J. L. FOWLER e J. M. SLYE Jr.: *Phys. Rev.*, **77**, 787 (1950).

(27) E. FERMI: *Nuclear Physics* (Chicago, 1950), p. 144.

sono invece:

$$\vartheta_T = 2/50 = 0,04 \text{ rad.}, \quad \vartheta_n = 3,5/50 = 0,07 \text{ rad.}$$

Questi angoli sono assai più piccoli dell'angolo medio di sparpagliamento elastico, il che dimostra che le condizioni geometriche da noi prescelte sono soddisfacenti.

È tuttavia necessario tener conto dei neutroni che, pur avendo subito nel diffusore uno o più urti, vanno ancora a colpire il rivelatore. SHERR (8) ha fatto vedere che la frazione di neutroni trasmessa si può porre nella forma:

$$(13) \quad T(x) = \exp [-x/l] \left[1 + a \frac{x}{l} + b \frac{x^2}{l^2} + \dots \right],$$

in cui x è lo spessore del diffusore e $l = 1/n\sigma$ è il cammino libero medio corrispondente alla sezione d'urto totale σ che si vuol misurare. I termini ax/l , bx^2/l^2 , ... rappresentano il contributo percentuale dei neutroni che hanno subito uno, due, ... urti nel diffusore. Per il coefficiente a , AMALDI (9) calcola l'espressione approssimata:

$$(14) \quad a = \frac{R^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{4} - 1,15 \cdot 10^{-3} \frac{R^2}{\lambda^2} \right] \frac{2\omega}{\pi},$$

dove ω è l'angolo solido sotto cui il diffusore è visto dalla targhetta (nel nostro caso: $\omega = 5,03 \cdot 10^{-3}$), mentre dimostra che già nelle sue condizioni geometriche, assai meno buone delle nostre, i termini successivi al secondo sono trascurabili.

Nel nostro caso risulta:

$$a = 3,18 \cdot 10^{-3} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \left[0,25 - 1,15 \cdot 10^{-3} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 \right],$$

e per R conviene prendere il valore che deriva dall'andamento medio dei raggi nucleari (14):

$$(15) \quad R = (1,3 + 1,37 A^{1/3}) \cdot 10^{-13}.$$

Per esempio, nel caso dello zolfo e del rame si ha quindi:

$$a_S = 1,50 \cdot 10^{-2}, \quad a_{Cu} = 2,03 \cdot 10^{-2},$$

mentre le corrispondenti correzioni nel caso di AMALDI sono rispettivamente: $11,8 \cdot 10^{-2}$ e $15,2 \cdot 10^{-2}$.

Un'altra correzione che occorre prendere in considerazione è quella dovuta alla presenza della scatola piena di B_2O_3 , che circonda il rivelatore. Questa scatola ha due effetti che conviene discutere separatamente.

a) Un certo numero di neutroni su di essa incidenti, che in assenza della scatola andrebbero a cadere sul rivelatore, viene invece assorbita o diffusa dal materiale ivi contenuto. Questo fatto non ha evidentemente nessuna influenza sul valore della trasmissione: infatti il numero dei neutroni che giunge effettivamente sul rivelatore continua ad essere proporzionale al numero di quelli che vi giungerebbero in assenza della scatola.

b) Un certo numero di neutroni incidenti sulla scatola di boro, che in assenza di essa non andrebbero a colpire il rivelatore, vengono ivi diffusi elasticamente in modo tale da investirlo. È facile vedere che l'influenza di questi neutroni sul valore della trasmissione è trascurabile.

In primo luogo, essendo l'angolo medio di diffusione elastica dell'ordine di $\lambda/R \sim 0,2$ rad., non esistono praticamente, nelle nostre condizioni geometriche, neutroni che giungano sulla scatola di boro senza aver attraversato il diffusore e subiscano in questa un urto che li mandi sul rivelatore.

Dei neutroni diffusi dalla scatola di boro sul rivelatore, quelli che hanno attraversato il diffusore senza subire urti rappresentano una frazione dei neutroni trasmessi che è uguale a quella dei neutroni diffusi dalla scatola sul rivelatore, in assenza di diffusore: questi neutroni non influenzano quindi il valore della trasmissione. Restano perciò solo da prendere in considerazione i neutroni che pur avendo subito un urto nel diffusore incidono ugualmente sulla scatola di boro e subiscono qui un secondo urto che li invia sul rivelatore. Si può valutare con la formula (14) di AMALDI che per un diffusore, per esempio, di zolfo dello spessore di un cammino libero medio, il numero di neutroni che hanno subito un urto che li mandi sulla scatola di boro è dell'ordine del 12% della frazione trasmessa. Di questi neutroni solo il 13% circa, cioè l'1,6% della frazione trasmessa, subisce un secondo urto nella scatola di boro, sicché la frazione di quelli che subiscono il secondo urto in modo tale da finire sul rivelatore è sicuramente molto inferiore all'1% e perciò molto inferiore all'errore statistico delle nostre misure.

5. — Resultati sperimentali.

Nelle condizioni geometriche della fig. 1 e con la procedura descritta nel n. 3, abbiamo innanzi tutto rimisurato la sezione d'urto totale del rame, allo scopo di controllare tutto il nostro metodo. Il risultato da noi ottenuto coincide soddisfacentemente entro gli errori statistici con quello precedentemente trovato da AMALDI.

Abbiamo quindi eseguito misure di sezione d'urto totale per un gruppo di elementi scelti tra quelli la cui sezione d'urto o non era stata fino a oggi mai misurata, o era stata misurata con risultati che scostavano molto sensibilmente dall'andamento medio rappresentato dalla (15). Tutti i risultati sperimentali da noi ottenuti, coi relativi errori statistici, sono riassunti nella tab. IV.

TABELLA IV.

Ele- mento	$A^{1/3}$	Spessore g cm ⁻²	T^{-1}	$\sigma \cdot 10^{21}$	$\sigma_{\text{corr.}} \cdot 10^{24}$	$R' \cdot 10^{13}$	Misure precedenti (AMALDI)
Al	3,00	16,21	$1,94 \pm 0,07$	$1,83 \pm 0,07$	$1,86 \pm 0,07$	$5,44 \pm 0,10$	$5,54 \pm 0,13$
Al ₂ O ₃	—	14,85	$2,03 \pm 0,05$	$8,63 \pm 0,22$	$8,77 \pm 0,22$		
O	2,52				$1,68 \pm 0,09$	$5,16 \pm 0,14$	
P	3,14	21,72	$2,51 \pm 0,05$	$2,18 \pm 0,05$	$2,22 \pm 0,05$	5,94 ± 0,07	
S	3,18	21,85	$2,21 \pm 0,09$	$1,97 \pm 0,10$	$2,00 \pm 0,10$		
—		28,73	$7,27 \pm 0,55$	$2,09 \pm 0,08$	$2,12 \pm 0,08$		
—					$2,06 \pm 0,07$	$5,71 \pm 0,10$	$5,02 \pm 0,16$
Cu	3,99	53,64	$4,67 \pm 0,28$	$3,03 \pm 0,12$	$3,09 \pm 0,12$	$7,01 \pm 0,14$	$6,75 \pm 0,18$
Au	5,82	40,53	$1,83 \pm 0,03$	$4,89 \pm 0,14$	$5,06 \pm 0,14$	$8,97 \pm 0,12$	$8,65 \pm 0,83$
Hg	5,85	65,81	$2,77 \pm 0,06$	$5,16 \pm 0,11$	$5,34 \pm 0,11$	$9,22 \pm 0,09$	$9,50 \pm 0,20$
Pb	5,92	41,10	$1,96 \pm 0,04$	$5,62 \pm 0,17$	$5,82 \pm 0,17$	$9,63 \pm 0,14$	$9,00 \pm 0,13$
Bi	5,93	67,92	$2,74 \pm 0,08$	$5,16 \pm 0,14$	$5,35 \pm 0,14$	$9,22 \pm 0,12$	$9,08 \pm 0,15$

In tale tabella, le prime tre colonne contengono: il simbolo dell'elemento sperimentato, la radice cubica del relativo numero di massa, lo spessore (in g cm⁻²) del campione di cui è stata misurata la trasmissione. Tale spessore è stato, per quanto possibile, scelto in modo che la trasmissione, tenuto conto del fondo, avesse un valore prossimo a quello optimum che rende minimo l'errore statistico della sezione d'urto (28). Nella quarta colonna della tav. IV

(28) M. E. ROSE e M. M. SHAPIRO: *Phys. Rev.*, **74**, 1853 (1948).

sono raccolti i valori del reciproco della trasmissione, corretti per i neutroni lenti, con i relativi errori. Quinta e sesta colonna contengono i valori delle sezioni d'urto che derivano direttamente dai dati di trasmissione e quelli corretti per la geometria non ideale. Infine, nelle ultime due colonne sono i raggi nucleari efficaci dedotti con la (4) dai valori delle sezioni d'urto e, per confronto, quando esistono, i valori di tali raggi precedentemente determinati da altri Autori.

La sezione d'urto dell'ossigeno è stata dedotta dal confronto delle trasmissioni dell'allumina e dell'alluminio metallico. Il nostro valore si accorda assai bene entro gli errori con le recentissime determinazioni americane, dovute una a POSS, SALANT, SNOW e YUAN (29) che dai valori delle sezioni d'urto totali dell'acqua e dell'idrogeno deducono:

$$\sigma_0 = 1,64 \pm 0,04 \text{ barn},$$

e le altre a MEYER e NYER (30) che dalle sezioni d'urto dell'acqua e dell'acido formico rispettivamente deducono:

$$\sigma_0 = 1,62 \pm 0,04 \text{ barn},$$

e:

$$\sigma_0 = 1,60 \pm 0,04 \text{ barn}.$$

Particolarmente notevole è il nostro risultato relativo allo zolfo, che è uno degli elementi che maggiormente scartavano dall'andamento medio nelle precedenti determinazioni e che costituiva uno dei più solidi appoggi all'ipotesi di una parziale dipendenza della sezione d'urto totale dalla struttura interna dei nuclei anche per neutroni di 14 MeV. Come si vede, il nostro risultato è in completo accordo con l'andamento medio (14), (che farebbe prevedere: $R'_S = 5,66 \cdot 10^{-13}$ cm) sicché ci sembra di poter concludere che lo scarto precedentemente segnalato da altri Autori è di carattere strumentale e presumibilmente dovuto alla difficoltà di correggere esattamente i dati di trasmissione per tener conto dei neutroni lenti. È da osservare a questo proposito che, contrariamente a ciò che avviene per quasi tutti gli altri elementi, la sezione d'urto totale dello zolfo per neutroni lenti è più piccola di quella per neutroni veloci (16), sicché la presenza di una piccola percentuale di neutroni lenti in questo caso abbassa la sezione d'urto media, anziché alzarla.

Anche il gruppo degli elementi pesanti: Au, Hg, Pb e Bi sembra accordarsi abbastanza bene con l'andamento medio, almeno nei limiti del nostro errore statistico. Occorre per altro tener conto del fatto che essendo la precisione con cui sono determinati i raggi nucleari dell'ordine in media del 2%,

(29) N. L. POSS, E. O. SALANT, G. A. SNOW e L. C. L. YUAN: *Phys. Rev.*, **87**, 11 (1952).

(30) D. J. MEYER e W. NYER: *Los Alamos Report No. 1279* (1951) (citato in (29)).

scostamenti sistematici dall'andamento medio di quest'ordine di grandezza possono benissimo passare inosservati. In complesso, come risulta anche dal grafico della fig. 2, che raccoglie le misure nostre e di altri, sembra di poter concludere che l'andamento (7) previsto dalla teoria di Weisskopf si verifichi sperimentalmente nei limiti entro cui, secondo lo stesso WEISSKOPF, ci si può aspettare che tale teoria schematica sia valida. Una piccola variazione delle costanti che compaiono nella (14) migliorerrebbe probabilmente un po' l'accordo tra retta interpolata e punti sperimentali: e però dubbio che ciò abbia molto senso.

Quando le misure descritte in questo lavoro erano ultimate e il lavoro

stesso ormai pronto per la stampa, ci è pervenuto il fascicolo del 1º Novembre della *Physical Review*, contenente il lavoro di COON, GRAVES e BARSCHALL (31), in cui questi Autori danno con una precisione dello stesso ordine della nostra le sezioni d'urto totali per neutroni di 14 MeV, di circa 50 elementi. I loro risultati sono tutti largamente in accordo, entro gli errori sperimentali, coi nostri e anch'essi giungono alla conclusione che non vi è nessun effetto apprezzabile, sull'andamento della sezione d'urto totale in funzione del numero di massa, della struttura interna dei nuclei. L'unica cosa che non abbiamo compreso in questo lavoro è il confronto che gli Autori fanno tra l'andamento dei raggi nucleari efficaci calcolati con la formula (4) e la retta che, secondo WEISSKOPF, rappresenta l'andamento medio dei raggi nucleari effettivi calcolati secondo la (6).

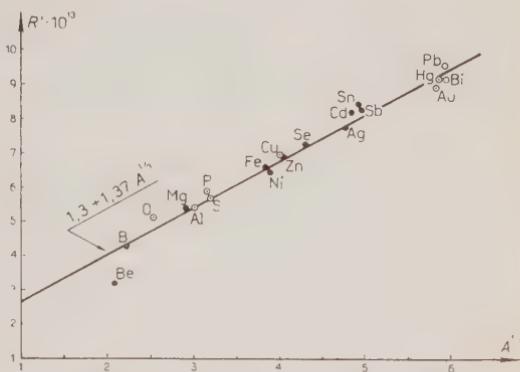


Fig. 2. — • Amaldi; ◎ Presente lavoro.

(31) J. H. COON, E. R. GRAVES e H. H. BARSCHALL: *Phys. Rev.*, **88**, 562 (1952).

S U M M A R Y

The total cross sections of several elements are measured in good geometry for 14 MeV neutrons. A detailed discussion is given of the corrections of transmission data for diffused slow neutrons. No systematic deviations from the one-third power law of the atomic weight are found for nuclear radii, and results are in general agreement, within the limit of standard errors of about 2%, with the statistical theory of Feshbach and Weisskopf.

Sul contributo alla componente elettronica della radiazione cosmica nell'atmosfera derivante dal decadimento delle particelle μ .

R. STROFFOLINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Padova
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 16 Gennaio 1953)

Riassunto. — Partendo dagli spettri sperimentali delle particelle μ nell'atmosfera si è calcolato il contributo alla componente elettronica derivante dal decadimento delle particelle μ . Si è usata la soluzione delle equazioni di diffusione della cascata elettrofotonica data da BHABHA e CHAKRABARTY, tenendo conto dei primi due termini della serie che ne costituisce la soluzione. L'intensità verticale degli elettroni di energia superiore a 10^7 eV , derivanti dal decadimento delle particelle μ , risulta sensibilmente inferiore a quella calcolata da altri autori (al livello del mare si trova $I_v = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$) il che può essere giustificato dal fatto che in tutti i precedenti calcoli si assumeva il decadimento delle particelle μ in due invece che in tre particelle.

1. — Una valutazione del contributo nell'atmosfera alla componente elettronica derivante dal decadimento delle particelle μ è stata fatta partendo da risultati sperimentali (¹) sugli spettri differenziali delle particelle μ a diverse quote.

Determinazioni analoghe erano state già fatte precedentemente da diversi autori (²) i quali però basavano i loro calcoli sull'animissione che la parti-

(¹) G. PUPPI e N. DALLAPORTA: *Progress in Cosmic Rays* (Amsterdam, 1951), p. 340, fig. 7a.

(²) B. ROSSI e S. J. KLOPMANN: *Phys. Rev.*, **61**, 414 (1952); I. TAMM e S. BELENKY: *Journ. Phys. U.S.S.R.*, **1**, 177 (1939); *Phys. Rev.*, **70**, 660 (1946); G. BERNARDINI, B. N. ACCIAPUOTI e B. QUERZOLI: *Nuovo Cimento*, **3**, 349 (1946). Per altre approssimazioni ved. P. CALDIROLA e P. GULMANELLI: *Nuovo Cimento*, **8**, 229 (1951).

cella μ decadesse, come allora si credeva, in due particelle anziché in tre, ed avevano usato per il calcolo del numero medio degli elettroni di decadimento il metodo delle tracce. Tale metodo rappresenta una buona approssimazione quando la sorgente si può considerare costante in un intervallo corrispondente al massimo percorso degli sciami generati, e ciò non si verifica quando la sorgente è rappresentata dagli elettroni di decadimento.

Si è ora cercato di migliorare le precedenti valutazioni considerando: 1) il decadimento delle particelle μ in tre particelle; 2) usando la soluzione delle equazioni di diffusione della cascata elettrofotonica data da BHABHA e CHAKRABARTY (3-4).

Come ha osservato MESSEL (5), della serie che ne costituisce la soluzione basta considerare i due primi termini per avere un'approssimazione soddisfacente che, inoltre, da un lato ha il vantaggio della semplicità su altre soluzioni a prima vista più accurate, semplicità che permette il calcolo degli spettri anche quando la sorgente è una funzione analitica dell'energia contenente più di un parametro; d'altro lato, l'accuratezza maggiore delle altre soluzioni è, o solo formale (per esempio quella di SNYDER (6)) o, anche se sostanziale (BERNSTEIN (7)), tiene anche conto della variazione con l'energia delle sezioni d'urto per irraggiamento e per produzione di coppie, più apparente che reale: in quanto, come hanno osservato BHABHA e CHAKRABARTY (3), è lecito nell'aria trascurare le variazioni delle sezioni d'urto per irraggiamento e per produzione di coppie a causa dell'alto valore dell'energia critica. Ciò è confermato dai calcoli fatti da CHAKRABARTY (8) che in un successivo lavoro ha tenuto conto delle suddette variazioni e dell'effetto Compton.

2. – Le particelle μ^+ e μ^- decadono con una vita media di $2,15 \cdot 10^{-6}$ s in tre particelle, un elettrone e due particelle neutre.

L'energia media dell'elettrone di decadimento, nel sistema di riferimento in cui la particella μ è a riposo, è di circa 36 MeV. Nel sistema terrestre l'energia dell'elettrone sarà quindi in media

$$(1) \quad E = \frac{36}{\mu_0 c^2} E_\mu ,$$

dove $\mu_0 c^2$ è l'energia a riposo della particella μ ($\mu_0 c^2 = 108$ MeV) ed E_μ è

(3) H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY: *Proc. Roy. Soc., A* **181**, 267 (1943).

(4) H. J. BHABHA e S. K. CHAKRABARTY *Phys. Rev.*, **74**, 1352 (1948).

(5) H. MESSEL: *Phys. Rev.*, **82**, 259 (1951).

(6) H. S. SNYDER: *Phys. Rev.*, **76**, 1563 (1949).

(7) I. B. BERNSTEIN: *Phys. Rev.*, **80**, 995 (1950).

(8) S. K. CHAKRABARTY: *Proc. Nat. Inst. Sc. Ind.*, **9**, 323 (1943).

l'energia totale della particella μ nel sistema terrestre. Sarà quindi

$$(2) \quad E \simeq \frac{E_\mu}{3}.$$

Si trascura naturalmente la probabilità che nell'aria le particelle μ subiscano una cattura.

Il numero degli elettroni prodotti in uno spessore $d\tau$ dal decadimento delle particelle μ , e aventi energia compresa tra E e $E + dE$ è pertanto

$$(3) \quad S(E, \tau) dE d\tau = \frac{H_0}{c\tau_0} \frac{\mu_0 c^2}{p_\mu \tau} f(E_\mu, \tau) \frac{dE_\mu}{dE} dE d\tau = \\ = \frac{3H_0}{c\tau_0} \frac{\mu_0 c^2}{\tau \sqrt{(3E)^2 - \mu_0^2 c^4}} f(3E, \tau) dE d\tau,$$

dove τ_0 è la vita media delle particelle a riposo, H_0 è l'altezza dell'atmosfera omogenea e $f(E_\mu, \tau)$ rappresenta lo spettro differenziale delle particelle μ alla quota τ , p_μ è uguale a c volte la quantità di moto della particella μ . A una distanza t' dalla sorgente lo spettro differenziale degli elettroni di cascata generati da questa sorgente sarà:

$$(4) \quad \pi(\eta, \tau, t') = \int_{\eta}^{\infty} S(E, \tau) N(E, \eta, t') dE,$$

dove

$$(5) \quad N(E, \eta, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E^{s-1} ds}{[\eta + \beta g(s, t')]^s} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\beta}{\eta + \beta g(s, t')} \right]^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f_n(s, t'),$$

è l'espressione data da BHABHA e CHAKRABARTY (4) per lo spettro differenziale degli elettroni di energia η di una cascata iniziata da un elettrone di energia E . L'integrale va calcolato lungo una retta parallela all'asse immaginario nel semipiano $\sigma > 1$. Il limite inferiore dell'integrale su E può essere preso uguale a zero, se la $S(E, \tau)$ si mantiene limitata per $E < \eta$, poiché $N(E, \eta, t')$ va a zero per $E < \eta$ non potendo avere gli elettroni secondari un'energia superiore al primario che li ha generati. Scambiando l'integrazione su E e su s e arrestando la serie ai primi due termini la (4) diventa

$$(6) \quad \pi(\eta, \tau, t') = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ds}{[\eta + \beta g(s, t')]^s} \left[f_0(s, t') - \frac{\beta^2 s (s+1) f_2(s, t')}{[\eta + \beta g(s, t')]^2} \right] \int_0^{\infty} S(E, \tau) E^{s-1} dE.$$

Lo spettro medio di formazione degli elettroni di decadimento è stato rappresentato mediante una funzione del tipo

$$(7) \quad S(E, \tau) = A(\tau) \frac{\exp[-B(\tau)/E]}{E^3},$$

la cui trasformata di Mellin relativa all'energia

$$(8) \quad M_s = \int_0^\infty S(E, \tau) E^{s-1} dE = A(\tau) \int \frac{\exp[-B(\tau)/E]}{E^3} E^{s-1} dE = \\ = A(\tau) B^{s-3}(\tau) \Gamma(3-s) = A(\tau) B^{s-3}(\tau) \frac{(2-s)(1-s)\pi}{\Gamma(s) \sin \pi s}, \quad \text{con } R(s) < 3,$$

introdotta nella (6) permette agevolmente il calcolo dell'integrale su s . Si ha infatti

$$(9) \quad \pi(\eta, \tau, t') =$$

$$\frac{A(\tau)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{B^{s-3}(\tau)}{[\eta - \beta g(s, t')]} \left[f_0(s, t') - \frac{\beta^2 s(s-1)f_2(s, t')}{[\eta - \beta g(s, t')]^2} \right] \frac{\pi(2-s)(1-s)}{\Gamma(s) \sin \pi s} ds.$$

L'integrale va ora calcolato lungo una retta parallela all'asse immaginario con la condizione $1 < \sigma < 3$. La funzione integranda presenta una infinità numerabile di poli lungo l'asse reale positivo per tutti gli interi $R(s) > 3$; poiché d'altra parte la funzione integranda tende a zero per $s \rightarrow +\infty$ è lecito completare il cammino d'integrazione mediante un semicerchio di raggio infinito che chiuda a destra il cammino stesso e uguagliare il precedente integrale alla somma con segno cambiato dei residui della funzione nel semipiano $R(s) > 3$ contenuto nel suddetto cammino chiuso. Si ha pertanto

$$(10) \quad \pi(\eta, \tau, t') =$$

$$= A(\tau) \sum_{s=3}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{(s-2)(s-1)}{\Gamma(s)} \frac{B^{s-3}(\tau)}{[\beta^2 - \beta g(s, t')]} \left\{ f_0(s, t') - \frac{\beta^2 s(s-1)f_2(s, t')}{[\eta - \beta g(s, t')]^2} \right\}.$$

Tale espressione per $t' = 0$ si riduce a

$$(11) \quad \pi(\eta, \tau, 0) = A(\tau) \sum_{s=3}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{(s-2)(s-1)}{\Gamma(s)} \frac{B^{s-3}(\tau)}{\eta^s}.$$

poichè

$$(12) \quad f(s, 0) = 1, \quad f_2(s, 0) = 0, \quad g(s, 0) = 0.$$

Eseguendo la somma nella (11) si ha:

$$(13) \quad \pi(\eta, \tau, 0) = A(\tau) \frac{\exp[-B(\tau)/\eta]}{\eta^3}.$$

Cioè si verifica che per $t' = 0$ lo spettro si riduce alla sorgente.

Passando dagli spettri differenziali agli integrali per energia $> \bar{\eta}$

$$(14) \quad \prod (\bar{\eta}, \tau, t') = \\ = A(\tau) \sum_{s=3}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{(s-2)(s-1)}{\Gamma(s)} \frac{B^{s-3}(\tau)}{[\bar{\eta} + \beta g(s, t')]^{s-1}} \left\{ \frac{f_0(s, t')}{s-1} + \frac{\beta^2 s f_2(s, t')}{[\bar{\eta} + \beta g(s, t')]^2} \right\}.$$

A noi interessa conoscere il numero totale di elettroni presenti a quota t (misurata a partire dal top dell'atmosfera). Bisogna quindi sommare tutti i contributi delle cascate dovute alle sorgenti poste alle diverse quote τ con $t' = t - \tau$. Si ha quindi

$$(15) \quad \prod (\bar{\eta}, \tau) = \int_0^t A(\tau) d\tau \sum_{s=3}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{(s-2)(s-1)}{\Gamma(s)} \frac{B^{s-3}(\tau)}{[\bar{\eta} + \beta g(s, t-\tau)]^{s-1}} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{f_0(s, t-\tau)}{s-1} + \frac{\beta^2 s f_2(s, t-\tau)}{[\bar{\eta} + \beta g(s, t-\tau)]^2} \right\}.$$

3. – Si è proceduto ad una valutazione numerica della serie (15) che figura sotto il segno di integrale e quindi ad un'integrazione numerica su τ . Le funzioni $A(\tau)$ e $B(\tau)$ da introdurre nella (15) sono

$$(16) \quad A(\tau) = 135 e^{-0,035\tau} + 1150 e^{-0,172\tau} - 1285 e^{-0,964\tau}; \quad B(\tau) = 20,5 \tau.$$

Le profondità sono tutte misurate in unità di radiazione.

Le funzioni sono state calcolate in modo da rendere gli spettri medi di formazione degli elettroni di decadimento ricavati dagli spettri sperimentali delle particelle μ dal livello del mare fino alla quota di 300 g/cm². Si è quindi estrapolata la $B(\tau)$ anche a quote superiori.

Per quel che riguarda la $A(\tau)$ osserviamo che essa è a meno di qualche per cento proporzionale alla intensità verticale delle particelle μ . Infatti si ha

dalla (3), considerando $p_\mu \cong E_\mu$, e ricordando (7),

$$\begin{aligned} I_v = \int_{\mu c^2}^{\infty} f(E_\mu, \tau) dE_\mu &\propto \int_{\mu c^2/3}^{\infty} \tau \frac{p_\mu}{3} S(E, \tau) dE \cong \\ &\cong \tau \int_{\mu c^2/3}^{\infty} ES(E, \tau) dE = \frac{\tau A(\tau)}{B(\tau)} \left(1 - \exp \left[- \frac{3B(\tau)}{\mu_0 c^2} \right] \right) \cong \frac{A(\tau)}{20,5}. \end{aligned}$$

La funzione $A(\tau)$ da noi calcolata è risultata proporzionale all'intensità delle particelle μ data da ROSSI (9). Si è estrapolato tale andamento a profondità inferiori ai 300 g/cm^2 , imponendo la condizione che l'intensità assuma un massimo ad una profondità di 100 g/cm^2 , come è risultato dalle più recenti determinazioni sulla intensità della componente dura. L'andamento dell'intensità oltre i 100 g/cm^2 non è ben conosciuto. D'altronde ai fini del presente lavoro non interessa la conoscenza in questa zona della intensità verticale. Infatti il calcolo della componente elettronica derivante dalle particelle μ è stato fatto fino ad una profondità di 430 g/cm^2 , e trascurabile risulta il contributo agli elettroni presenti a questa quota dovuto a cascate iniziate a profondità inferiori ai 100 g/cm^2 . Non si è esteso il calcolo della componente elettronica derivante dal decadimento delle particelle μ a profondità inferiori ai 430 g/cm^2 poiché essa diventa trascurabile rispetto a quella derivante dal decadimento dei π^0 (10). La serie (15) con i valori di $B(\tau)$ dati dalla (16) risulta rapidamente convergente, eccetto per $t - \tau < 1$.

Considerando solo i primi sei o sette termini si ha un resto inferiore al 3% della somma dei primi termini. I valori della funzione integranda calcolati per diversi valori di τ mostrano che la funzione integranda è una funzione crescente di τ . Prima di estrarre tale dipendenza a valori di τ per cui risulta $t - \tau < 1$, abbiamo calcolato la derivata della funzione integranda rispetto a τ nel punto $\tau = t$. Essa risulta positiva e quindi è giustificato assumere che la funzione integranda sia funzione crescente di τ anche nell'intervallo $0 < t - \tau < 1$, non essendo ammissibile da un punto di vista fisico che la funzione assuma un massimo ed un minimo in tale intervallo.

TABELLA I.

Profondità	440	680	830	1 033	g/cm^2
Intensità verticale	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$0,34 \cdot 10^{-2}$	$0,19 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$\text{s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ sterad}^{-1}$

(9) B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

(10) D. CADORIN: *Nuovo Cimento*, in corso di stampa.

I risultati ottenuti sono riportati nella tab. I; essi sono sensibilmente inferiori a quelli di altri autori. Infatti BERNARDINI, QUERZOLI e CACCIAPUOTI (2) calcolano col metodo delle tracce che al livello del mare il numero di elettroni di decadimento di energia superiore a 10 MeV è il 20% dell'intensità verticale delle particelle μ .

ROSSI e Klapmann (2), anche col metodo delle tracce, trovano che gli elettroni di decadimento sono il 19% delle particelle μ di energia superiore a 300 MeV. Essi quindi hanno che l'intensità verticale degli elettroni di decadimento è rispettivamente $1,7 \cdot 10^{-3}$ e $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Si potrebbe pensare che tale differenza sia dovuta al fatto che i precedenti Autori assumevano che la particella μ decadesse in due particelle anziché in tre. Se per semplicità consideriamo uno spettro delle particelle μ del tipo E^{-2} avremo che il rapporto tra la (3) nell'ipotesi del decadimento in due e in tre particelle è dato da:

$$\frac{S_2(E, \tau)}{S_3(E, \tau)} = \frac{f(2E, \tau)}{f(3E, \tau)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25 ,$$

tralasciando nella (3) $\mu_0 c^2$ rispetto a 3E.

Riducendo i risultati di ROSSI e di BERNARDINI secondo il rapporto sudetto avremmo rispettivamente $0,67 \cdot 10^{-3}$ e $0,71 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \text{ s}^{-1}$, cioè valori più bassi che non quello da noi trovato. Bisogna però osservare che lo spettro delle particelle μ e quindi quello degli elettroni di decadimento non è uno spettro di potenza per basse energie (vedi formula (7)), per cui più piccola deve essere la riduzione da apportare ai risultati dei precedenti autori per tener conto del diverso schema di decadimento.

Naturalmente i risultati in questo calcolo, come in ogni calcolo unidimensionale, andrebbero corretti per lo sparpagliamento angolare. Nel presente caso gli effetti della angolazione nel processo di generazione e dello sparpagliamento della cascata si sommano; c'è pertanto da attendersi che il valore ottenuto, a parte la precisione del metodo, sia un po' in eccesso per una quantità dell'ordine del 25% (11).

Il metodo però non sovrastima il numero degli elettroni e pertanto possiamo ritenere che la quantità ora citata sia un ragionevole ordine di grandezza della incertezza globale.

Ringrazio sentitamente i professori E. CLEMENTEL, N. DALLAPORTA, G. PUPPI per l'interesse con cui hanno seguito il presente lavoro.

(11) G. PUPPI: *Bilancio energetico della radiazione cosmica* (in corso di pubblicazione sul *Supplemento al Nuovo Cimento*).

SUMMARY

Starting from the experimental spectra of the μ particles in the atmosphere, the contribution to the electronic component from the decay of the μ particles has been calculated. The BHABHA and CHAKRABARTY solution of the diffusion equations has been used, taking into account only the first two terms of the series of the solution given by these authors. The vertical intensity of the electrons with energy greater than 10^7 eV, originating from the μ particle decay is found to be markedly less than generally calculated by other authors (at sea level $I_v = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$); this can be probably justified by the fact that in all the preceding calculations the μ particle was assumed to decay into two instead of three particles.

Nuclear Capture of Negative μ Mesons in Photographic Emulsions.

H. MORINAGA (*)

Department of Physics, Iowa State College, Ames, Ia. (**)

W. F. FRY (*)

Department of Physics, University of Chicago, Chicago, Ill. (**)

(ricevuto il 19 Gennaio 1953)

Summary.— Ilford C-2 emulsions have been exposed to negative μ mesons from the University of Chicago cyclotron. The μ mesons were separated from the π mesons of the same momentum by utilizing the difference in the ranges of the μ and π mesons in Cu. About 24 000 meson tracks which stopped in the emulsion have been studied. In 591 cases (2.4 percent) the stopped meson is accompanied by the emission of one or more charged particles. A large percentage of these « stars » are one prong stars. The energy distributions of protons and alpha-particles from the one prong stars have been obtained. The general shapes of the energy distribution curves indicate that the protons and alpha-particles from these stars are mostly evaporation products from a moderately excited nucleus such as silver or bromine. The average energy of the charged particles from these stars is lower than from negative π meson stars. The negative π meson contamination is found to be less than 0.3 percent. In several cases the characteristics of the star make it possible to identify the nucleus in which the meson was captured and to evaluate the energy given to the nucleus. In these cases the energy given to the nucleus is found sometimes to be as high as 45 MeV.

(*) On leave from the University of Tokyo, Tokyo, Japan.

(**) Supported in part by a grant from the Research Corporation.

(*) AEC postdoctoral fellow (1951-52). Present address: Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin.

(**) Supported in part by a joint program of the ONR and AEC.

1. - Introduction.

It is believed that a negative μ meson which stops in a material is captured in a Bohr orbit of an atom and then it may be captured by the nucleus or decay with the emission of an electron. The excitation of the nucleus following the capture of the negative μ meson is thought to be much lower than the corresponding excitation by a π meson. In the latter case nearly all of the rest energy is given to the nucleus. The relatively low nuclear excitation resulting from the capture of a negative μ meson has been explained⁽¹⁻³⁾ by assuming that the absorption of the negative μ meson changes one proton in the nucleus to a neutron with the emission of a light neutral particle (perhaps a neutrino), which carries away nearly all of the rest energy of the μ meson. The reaction can be written in the following manner,



Using cosmic ray mesons, the excitation of the nucleus following the capture of a negative μ meson has been observed by several authors, using counters⁽⁴⁻⁹⁾ and cloud chambers^(10,11). It has been found that neutrons accompany the nuclear capture of negative μ mesons. Also it was suspected that occasionally charged particles are emitted.

From a study of photographic emulsions prepared and processed underground, GEORGE and EVANS⁽¹²⁾ found that 8.7 ± 1.7 percent of the μ mesons captured by a nucleus resulted in the emission of a charged nuclear particle. SHERMAN, HECKMAN and BARKAS⁽¹³⁾ studied the capture of negative μ mesons

⁽¹⁾ S. SAKATA and T. INOUE: *Theor. Phys.*, **1**, 143 (1946).

⁽²⁾ B. PONTECORVO: *Phys. Rev.*, **72**, 246 (1947).

⁽³⁾ J. TIOMNO and J. A. WHEELER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 153 (1949).

⁽⁴⁾ H. G. VOORHIES and J. C. STREET: *Phys. Rev.*, **76**, 1100 (1949).

⁽⁵⁾ R. D. SARD, W. B. ITTNER, A. M. CONFORTO and M. F. CROUCH: *Phys. Rev.*, **74**, 97 (1948).

⁽⁶⁾ R. D. SARD, A. M. CONFORTO and M. F. CROUCH: *Phys. Rev.*, **76**, 1134 (1949).

⁽⁷⁾ G. GROETZINGER and G. MCCLUE: *Phys. Rev.*, **74**, 341 (1948).

⁽⁸⁾ M. F. CROUCH and R. D. SARD: *Phys. Rev.*, **85**, 120 (1952).

⁽⁹⁾ A. M. CONFORTO and R. D. SARD: *Phys. Rev.*, **86**, 465 (1952).

⁽¹⁰⁾ R. L. COOL, E. C. FOWLER, W. B. FOWLER, J. C. STREET and R. D. SARD: *Phys. Rev.*, **75**, 1275 (1949).

⁽¹¹⁾ W. Y. CHANG: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 166 (1949); *Phys. Rev.*, **79**, 205(A) (1950).

⁽¹²⁾ E. P. GEORGE and J. EVANS: *Proc. Phys. Soc. (London)*, **A 64**, 193 (1951).

⁽¹³⁾ D. F. SHERMAN, H. H. HECKMAN and W. H. BARKAS: *Phys. Rev.*, **85**, 771A (1952).

produced by the Berkeley cyclotron. The various phenomena associated with stopped $-\mu$ mesons from the University of Chicago cyclotron have been studied using electron sensitive emulsions (14). It was found that 3 ± 0.6 percent of the stopped $-\mu$ mesons were accompanied by the emission of one or more charged nuclear particles.

Since it was found possible to obtain a relatively high flux of μ mesons with a very low π contamination from the University of Chicago cyclotron, it seemed worthwhile to plan an extensive study of $-\mu$ meson phenomena in photographic emulsions.

2. — Experimental procedure.

Ilford C-2 emulsions of 400 microns in thickness were chosen because of the desirability of distinguishing proton tracks from alpha particle tracks. Also the background of fast particles is less confusing in C-2 plates than in electron sensitive G-5 plates.

From previous experimental data (12,14) it was expected that a small negative π meson contamination would make the study of the capture of negative μ mesons very difficult if not impossible; therefore considerable care was exercised in making the exposures in an attempt to minimize the π meson contamination without seriously reducing the number of negative μ meson endings in the plates. The geometry of the exposures is shown in Fig. 1. The π mesons were produced by the bombardment of an internal Be target by 450 MeV protons. The mesons which have a certain momentum and initial direction are deflected by the fringing magnetic field of the cyclotron and go through a small opening in a thick iron shield which separates the experimental area and the cyclotron. The mesons are further deflected through about 45 degrees by an analyzing magnet. A small percentage of the π mesons decay into μ mesons while still near the target. A fraction of these μ mesons have the same momentum and direction as the π mesons, consequently the μ mesons will follow the same trajectory as the π mesons.

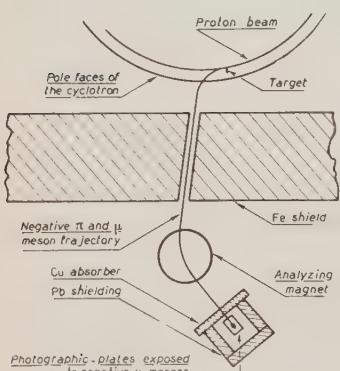


Fig. 1. — The geometry of the exposures of photographic plates to slow negative μ mesons from the University of Chicago cyclotron.

deflected through about 45 degrees by an analyzing magnet. A small percentage of the π mesons decay into μ mesons while still near the target. A fraction of these μ mesons have the same momentum and direction as the π mesons, consequently the μ mesons will follow the same trajectory as the π mesons.

(14) W. F. FRY: *Phys. Rev.*, **85**, 676 (1952).

Due to the difference in the rest masses of the π and μ mesons, the ranges of the mesons in an absorber are different. The range of the π mesons in Cu is about 6 cm, while the range of the μ mesons of the same momentum is about 8.1 cm.

The plates were completely shielded by lead in order to prevent any scattered π mesons from entering the plates. The plates were exposed for about one hour with a proton dissipation in the target of 20 watts. About 130 meson endings per cm^2 were obtained in the plates. The plates were slightly over-developed in order that the meson tracks could be easily recognized during the scanning. Proton tracks of 25 MeV were clearly visible with a total magnification of $210\times$.

The plates were scanned with an overall magnification of $210\times$. Each meson ending was looked at carefully. In order to reduce the scanning time, the coordinates of each meson ending were not recorded. Because of the overlapping of subsequent sweeps, occasionally a star was recorded twice. After observing 26289 meson endings, 642 stars were found, which includes 51 stars that were recorded twice. Therefore about 8 percent of the meson endings were looked at twice, so that the actual number of the meson endings that have been studied is about 24000. The probability of finding a meson ending without and with a star may have been slightly different, but since the events were almost always recognized after following the meson track, these two probabilities would not appear to be significantly different.

3. - Results.

Classification of stars. - It is often found impossible to distinguish the latter portion of a track of a meson if it should happen to be scattered in the last 10 microns, from a short track of a charged nuclear particle. In order to avoid classifying a scattered meson as a one prong star, an event was considered to be a one prong star only if the track appeared to be due to a nuclear charged particle and if it was longer than 10 microns. The nuclear recoil from an energetic neutron following the capture of a $-\mu$ meson could cause a small one prong star. The nuclear recoil would have the greatest range if the meson were captured in the lightest element in the emulsion (excluding hydrogen). From the capture of a $-\mu$ meson by a carbon nucleus, the range of the recoiling nuclear fragment would be less than 10 microns but in some cases greater than 1 micron. However, the recoiling nucleus from the capture by one of the heavy elements in the emulsion could not produce an observable recoil. Due to the coulomb barrier it would seem very improbable that a very low energy proton or alpha particle could be ejected. Therefore only the capture of a μ meson by one of the light elements in the emulsion

can result in an event which consists of only one very short track. On the basis of the adopted criterion, such events are not classified as stars and are not included in the data. On the other hand, the number of events which consist of only an observable recoil is estimated to be small since the μ meson must give about 25 MeV to a light nucleus in order to produce such an event.

If more than one track of a nuclear particle is associated with the stopped μ meson, the event is called a star regardless of the length of the tracks as long as the tracks appear to have a direction. For example, an event which consists of a track 50 microns long and a track 5 microns long would be classified as a two prong star and would be called a two prong star including recoil.

The prong number distribution of the stars is shown in Table I.

TABLE I. — *Prong Number Distribution of Stars.*

Type of Star	No. obtained from distribution curve	No. observed	Prong no. distribution for $-\pi$ mesons (*) (percentage)
1 prong stars	protons 313 alpha part. 76		23.6
2 prong stars including one small recoil track	protons 62 alpha part. 27	519	
2 prong stars with two short tracks	—	26	24.0
Other 2 prong stars	—	20	
3 prong stars including two short tracks	—	7	14.8
Other 3 prong stars	—	13	
4 prong stars	—	5	8.7
5 prong stars	—	1	1.9

(*) F. L. ADELMAN and S. B. JONES, *Phys. Rev.* **75**, 1468 (1949).

Probability of star formation. — Among 24 000 meson endings a total of 591 (2.4 percent) were accompanied by the emission of charged nuclear particles. Several factors may introduce an error in the measurement of the percentage of negative μ mesons which cause stars; (1) a statistical error due to the finite number of events, (2) a small π meson contamination may be

included, (3) confusing a scattered μ meson near the end of its range with a small one prong star, (4) a systematic error introduced by rapid scanning.

Since the number of events is fairly large, the error due to factor (1) is not serious. The π meson contamination is estimated to be less than 0.3 percent from the comparison of the prong number distribution of the present data with the prong number distribution of the stars caused by negative π mesons which stop in the emulsion (15). If it is assumed that the 3 prong stars (excluding those which contain two very small prongs) and all of the 4 prong stars and one 5 prong star are caused by negative π mesons the number of zero, one and two prong π meson stars which are included in the μ meson data, can be estimated from the known prong distribution of negative π meson stars. Following this procedure it is estimated that about 75 of the 591 stars were caused by negative π mesons. The π meson contamination is then $75/24\,000 = 0.3$ percent. This is a conservative estimate of the π meson contamination because several small 3 prong stars are included as π mesons. These small 3 prong stars may be due to μ mesons rather than π mesons.

One prong stars. — The bulk of the stars have only one prong in contrast to the relatively high percentage of multi-prong stars produced by π mesons. Typical examples of one prong stars are shown in Fig. 2 and Fig. 3. The particles from the one prong stars are mainly singly charged particles (probably most of them are protons), but an appreciable number of alpha particles were found. The alpha particles were distinguished from the singly charged particles visually by their higher grain density and by the smaller number of gaps. A proton track can usually be distinguished from an alpha particle track if the track makes an



Fig. 2. - A projection drawing of a one prong star caused by a negative μ meson which was found in a C-2 emulsion. The track of the α particle stopped in the emulsion. The energy of the α particle is 9.5 MeV.

(15) F. L. ADELMAN and S. B. JONES: *Phys. Rev.*, **75**, 1468 (1949); F. L. ADELMAN: *Phys. Rev.*, **85**, 249 (1952). About 97 percent of the negative μ mesons which stop in the emulsion do not produce stars, therefore the inclusion of a relatively small percentage of negative μ mesons can cause an appreciable error in the prong number distribution of negative π meson stars. To check this prong distribution, a study has been made in electron sensitive plates of mesons from the π meson beam. The nega-

angle with the plane of the emulsion of less than about 45 degrees and if it is longer than about 20 microns.

The energy distributions of the protons and alpha particles from the one prong stars have been obtained (a small number of deuterons and tritons may

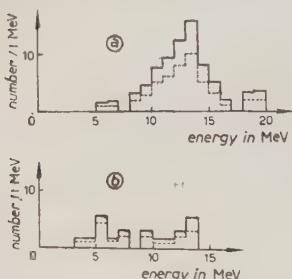


Fig. 4. - The energy distribution of protons from one prong stars is shown in Fig. 4(a) and the distribution from 2 prong stars which have one moderately track and a recoil track is shown in Fig. 4(b). The dashed curves are the distributions without the geometrical correction factor, while the solid curves are the corrected distributions.

stars are those stars which are only different from the one prong stars described above by the existence of an additional short track (usually 1 to 3 microns in length). The short track is almost always in the opposite direction to the longer track. Both alpha particles and singly charged particles are sometimes accompanied by a short track. In general the two tracks are more nearly colinear in the events where the longer track is an alpha particle. In two cases the angle between the proton track and the short track is less than 90 degrees. The probability of emission from an Ag or Br nucleus of an alpha particle or a proton of such a low energy is extremely small. The recoil from a light nucleus could result in a star which has a very short track⁽¹⁶⁾; therefore such stars are interpreted as due to the capture in the light elements of the emulsion. The energy distributions of

be included in the proton distribution), by measuring the ranges of the tracks which stopped in the emulsion of less than 45 degrees. Since this procedure omits about half of the events, the results were corrected by multiplying by a geometrical correction factor which increases as the energy of the particle increases corresponding to the increasing probability of the particle leaving the emulsion. The corrected distribution curves are given in Fig. 4(a) and Fig. 5(a). The assignment of the particle is sometimes difficult for tracks whose ranges are less than about 20 microns. Therefore the distributions for protons less than 2 MeV and for alpha particles less than 6 MeV are not certain.

Two prong stars in which one track is very short.

— The next large group of

tive μ meson contamination was determined by observing the number of μ -e decays and using the known percentage (39 ± 3) of negative μ mesons which decay in a photographic emulsion. The results of this study are in agreement with the previous finding of ADELMAN and JONES.

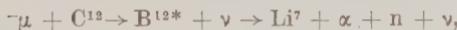
(16) C. H. MILLAR and A. G. W. CAMERON: *Phys. Rev.*, **78**, 78 (1950).



Fig. 3. — A photomicrograph of a one prong star caused by a negative μ meson.
There is no evidence for a nuclear recoil.

protons and alpha particles from two prong stars including recoil were obtained in the same manner as the distributions from one prong stars. The distributions, corrected by geometrical statistical factors, are given in Fig. 4(b) and Fig. 5(b). Typical examples of two prong stars including recoil are shown in Fig. 6 and Fig. 7.

Small two prong stars. — In the majority of the two prong stars the ratio of the lengths of the two prongs is quite large. There is a group of two prong stars where both tracks are quite short. A total of 22 of the stars of this type has been found. The angle between the two tracks in each event is between 90 and 180 degrees, and the ratios of the lengths of the two tracks are distributed around three. A typical example of this type of two prong star is shown in Fig. 8. Stars of this type have been reported by GEORGE and EVANS (12). These events may be attributed to the capture of a μ meson by a carbon nucleus which leads to either of the following reactions:



or

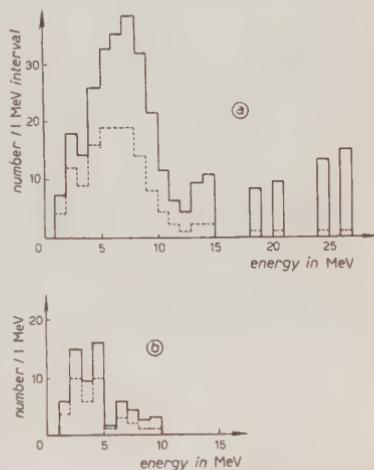
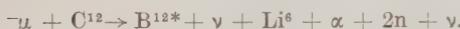
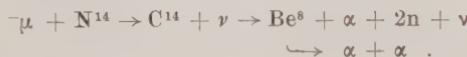
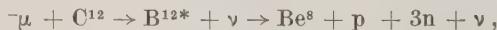


Fig. 5. — The energy distribution of alpha particles from one prong stars and from two prong stars including recoil are shown in Fig. 5(a) and Fig. 5(b) respectively. The solid curves are the distributions corrected for the greater probability that the longer tracks will leave the emulsion.

Stars including one moderately long prong and additional two very short prongs. — A total of 7 events have been observed in which one moderately long track is accompanied by two tracks of a few microns in length. An example of a three prong star of this type is shown in Fig. 9. The two short tracks are nearly in the same direction and are opposite to the longer track. The two short tracks are thought to be alpha particles from the break-up of a Be^8 nucleus from the ground state. In two cases the longer track appears to be due to an alpha particle and in five cases the longer track appears to be due to a singly charged particle. The events where the longer track appears to be due to an alpha particle can be attributed to the capture of a μ meson by a nitrogen nucleus which lead to the following reaction:



The events where the longer track is singly charged may be attributed to one of the following reactions:



or

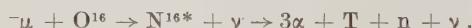


or



In the 2 cases where the longer track is due to a singly charged particle, the momentum balance and the characteristics of the track indicate that these tracks are probably due to protons. In 3 cases the longer track appears to be slightly heavier than a proton tracks. The assumption that these particles are tritons makes the residual momenta carried off by the neutral particles (one neutron and possibly one neutrino) and also the energy transfer to the nucleus the smallest. The momentum of the neutrino is not negligible in comparison with the residual momentum of the nuclear particles. The uncertainty in the neutrino momentum causes a small uncertainty in the determination of the energy given to the nucleus. Assuming that the singly charged particles are tritons, the energy given to the nucleus is about 44, 35 and 33 MeV.

One 4 prongs star has been observed which can be ascribed to the capture by an oxygen nucleus,



In order to confirm the assumption that the small two prong stars and the three prong stars which involve the two short tracks are caused by μ mesons, a total of 700 stars caused by stopped negative π mesons have been studied. Of these 700 stars only two were found that have short prongs and no stars similar to the stars with only two small prongs were observed. From this study it is concluded that the stars with only two short prongs and the three prong stars which have two short tracks are due to negative μ mesons and not π mesons.

4. - Discussion.

Most of the one prong stars can be interpreted as resulting from the capture of a negative μ meson by a Ag or Br nucleus. A small number of one prong stars due to the capture in the light elements may be included. The proton energy distribution may be affected by incorrectly assigning deuterons and tritons as protons, but the number of deuterons and tritons is expected to be small. These two errors would affect only the low energy portion of the energy distribution curve. Actually the low energy portion of the distribution



Fig. 6. — A two prong star including recoil is shown in the mosaic.



Fig. 7. — A typical example of a two prong star including recoil is shown in the photograph. The two tracks are not colinear, indicating that momentum was carried away by one or more neutral particles.



Fig. 8. — A photograph of a small two prong star caused by a $-\mu$ meson. The two tracks are short and are not colinear.



Fig. 9. — A three prong star with two short prongs is shown in the above photograph. The star is interpreted as due to the capture of the negative μ meson in carbon.

curve seems to be a little higher than would be expected for an excitation slightly higher than the coulomb barrier. The increased number of events of low energy is probably due to the inclusion of a few events from the light elements and the inclusion of deuterons and tritons as protons. Nevertheless, the bulk of the events are undoubtedly due to the capture in the heavy elements. The one prong stars which consist of only an alpha particle are most probably due to the capture in the heavy elements. Both the shape and the position of the maxima of the distribution curves are characteristic of an evaporation process from excited states of a medium weight nucleus. If the results are compared with the results of MENON *et al.* (17) who measured these energy distributions from negative π meson stars, we note that the excitation accompanying μ meson capture is definitely lower than the excitation accompanying π meson capture.

The group of stars consisting of one moderately long track and one short track is thought to be due to the capture in the light elements. The energy distributions for both protons and alpha particles show a lower average energy compared to the distributions from one prong stars, which is to be expected from an evaporation process from light nuclei.

It has been observed that 39 ± 3 percent of the negative μ mesons which stop in an emulsion decay into an electron (14). Assuming that the nuclear capture probability of a negative μ meson is proportional (18) to z^4 , and that the atomic «catching» probability in the light elements of the gelatine is proportional (19) to z , then 42 percent of the slow μ mesons stop in gelatine and 58 percent stop in Ag and Br. A total of 14 000 mesons are estimated to have stopped in the heavy elements and 10 000 in light elements. The meson capture in the heavy elements is accompanied in 313 cases (2.2 percent) by the emission of one proton and in 76 cases (0.5 percent) by one alpha particle. Only 8 percent of the mesons are estimated to have been captured in the light elements. From the number of stars with one moderately long prong and one very short prong, the percentage of captures in the light elements which lead to proton and alpha particle emission is $76/800 = 9.5$ percent and $27/800 = 3.4$ percent respectively. These percentages are low because the small two prong stars and the three prong stars involving Be⁸ break-up are not included. Furthermore a small number of stars with one moderately long prong and a very short prong may be incorrectly classified as one prong stars and not included among the stars from the light elements. Nevertheless the ejection of protons and alpha particles from the capture in the light elements is considerably higher than from the heavy elements.

(17) M. G. K. MENON, H. MUIRHEAD and O. ROCHAT: *Phil. Mag.*, **41**, 583 (1950).

(18) J. W. WHEELER: *Phys. Rev.*, **71**, 462A (1947).

(19) E. FERMI and E. TELLER: *Phys. Rev.*, **72**, 399 (1947).

The relatively high percentage of charged particle emission shows that the nuclear excitation is not too low. It is known that the ratio of the probabilities of proton to neutron emission is higher in the light elements than in the heavy elements. The reactions which involve proton emission have a high threshold. The fact that charged particle emission is frequently observed, shows that a nuclear excitation of 25 MeV is not uncommon. The very small two prong stars and the stars involving a Be⁸ recoil show more directly the high nuclear excitation.

The rather frequent occurrence of a high nuclear excitation following the capture of a negative μ meson may be understood by considering the interaction of the μ meson with a bound nucleon in a nucleus with subsequent neutrino emission, as has been done by TIOMNO and WHEELER (3).

The authors are indebted to Dr. M. SCHEIN and Dr. J. K. KNIPP for their continued interest and encouragement and for many helpful discussions. The authors are also indebted to Dr. H. L. ANDERSON for the use of the facilities of the Chicago cyclotron.

RIASSUNTO (*)

Delle emulsioni Ilford C-2 sono state esposte a mesoni μ negativi prodotti dal ciclotrone dell'Università di Chicago. I mesoni μ si separavano dai mesoni π di pari impulso utilizzando la differenza di range dei mesoni μ e π nel Cu. Si sono studiate circa 24 000 tracce che si arrestano nell'emulsione. In 591 casi (2,4%) l'arresto dei mesoni è accompagnato dall'emissione di una o più particelle cariche. Una larga percentuale di dette stelle è formata di stelle a 1 ramo. Si sono ricavate le distribuzioni delle energie dei protoni e delle particelle α delle stelle a 1 ramo. L'andamento generale delle curve di distribuzione dell'energia indicano che i protoni e le particelle α derivati da queste stelle sono, generalmente, prodotti di evaporazione di un nucleo moderatamente eccitato, come l'Ag o il Br. L'energia media delle particelle cariche originate da queste stelle è minore di quella delle analoghe particelle derivate da stelle di mesoni π negativi. La contaminazione da parte di mesoni π negativi si trova essere inferiore al 0,3%. In alcuni casi le caratteristiche della stella permettono di identificare il nucleo in cui il mesone è stato catturato e di calcolare l'energia ceduta al nucleo. In questi casi, si constata, a volte, che l'energia ceduta al nucleo ammonta fino a 45 MeV.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Selection Rules Imposed by Charge Conjugation.

L. MICHEL

European Council for Nuclear Research (CERN) - Theoretical Study Group ()*

(ricevuto il 24 Gennaio 1953)

Summary. — A systematic study is made of the invariance of field theories under charge conjugation in order to indicate all possible selection rules due to charge conjugation alone or combined with charge symmetry or charge independence. It is shown that when isotopic spin formalism is used, invariance under charge conjugation corresponds to conservation of isotopic parity.

As is well known, present theories are invariant with respect to charge conjugation (1,2), i.e. there is a complete symmetry between the two «charge conjugate» states of particles whose fields are described by non-hermitian operators (complex wave function in the usual loose terminology), and the exchange of these two charge conjugate states is called charge conjugation. Fields described by hermitian operators (real wave functions), as the electromagnetic field, contain particles with only one state (no antiparticles); these self-charge conjugate particles will be called «strictly neutral». The theory of «strictly neutral» particles of spin 1/2 is due to MAJORANA. (2)

It is expected that invariance of the theory under charge conjugation gives selection rules: some of them have been found by FURRY (3,4). In the same

(*) At the Institute for Theoretical Physics, the University of Copenhagen.

(1) H. A. KRAMERS: *Proc. Kon. Ac. Wetensch. Amsterdam*, **40**, 814 (1937).

(2) E. MAJORANA: *Nuovo Cimento*, **14**, 171 (1937).

(3) W. H. FURRY: *Phys. Rev.*, **51**, 125 (1937).

(4) After this work was completed, the paper of L. WOLFENSTEIN and D. G. RAVENHALL: *Phys. Rev.*, **88**, 279 (1952) came to my notice. It contains many of the results of section 1 and 2 and therefore gives a fairly complete list of the selection rules due

way, the combination of invariance with respect to charge conjugation and charge symmetry (exchange of protons and neutrons) leads to new selection rules. Those analogous to Furry's theorem have been found, some of them by FUKUDA and MIYAMOTO (⁵) (see also NISHIJIMA (⁶), VAN WYCK (⁶)), the others by the author (⁷). They have recently been proved quite generally by PAIS and JOST (⁸). These authors use *S*-matrix formalism without the use of a power series expansion.

It is intended in this paper to study systematically and to indicate all other possible selection rules due to charge conjugation (alone or in combination with other invariances). Indeed selection rules due to charge conjugation are of fundamental character; they are due to the invariance of the formalism with respect to given groups. Our program is therefore to determine these groups, it then will be an easy matter to indicate all possible selection rules. This deduction does not make any assumption about the possible methods for solving the starting equations.

For instance: charge independance of nuclear forces is obtained by the assumption of conservation of isotopic spin (invariance with respect to the group R_3 of rotations in the three dimensional isotopic space). We shall see that charge conjugation is linked with the conservation of isotopic parity (invariance under reflexions in isotopic space). For instance, to include charge conjugation considerations in the study of π -mesons (assumed to be pseudo-scalar symmetric) one shall consider them as *polar* vectors in isotopic space.

Aside electrodynamics, for the sake of simplicity, only the usual meson theories (⁹) will be studied in this paper: the extension of the method to other field theories will be obvious.

In the application of new selection rules, it is useful to remember the other selection rules. Those due to energy momentum conservation are evident; the complete list of those due to angular momentum and parity conservation does not seem generally known and is given in appendix.

to charge conjugation alone. Since our method is more general (we do not need explicit calculations) and complete, it seems desirable to present a self-contained treatment. The results already obtained by WOLFENSTEIN and RAVENHALL will be denoted by the reference (⁴).

(⁵) H. FUKUDA and Y. MIYAMOTO: *Progr. Theor. Phys.*, **4**, 389 (1949).

(⁶) C. B. VAN WYCK: *Phys. Rev.*, **80**, 487 (1950); K. NISHIJIMA: *Progr. Theor. Phys.*, **6**, 614 (1951).

(⁷) L. MICHEL: Chapter 3 of *Progress in Cosmic Ray Physics*, esp. p. 142 to 144 (Amsterdam, 1952).

(⁸) A. PAIS and R. JOST: *Phys. Rev.*, **87**, 871, (1952). I wish to thank Drs. PAIS and JOST for communication of their manuscript prior to publication.

(⁹) N. KEMMER: *Proc. Roy. Soc. London*, A **166**, 127 (1938).

1. - Electrodynamics.

On the advice of some physicists, group theory will not be (explicitly!) used in this section. Of course, section 1 is only an example of application of section 2.

1.1. - In what cases will selection rules due to charge conjugation appear?

To charge conjugation corresponds an operator C which exchanges positons and negatons (the two states of charge of electron) and transforms photons into themselves. It therefore satisfies ⁽¹⁰⁾:

$$(1) \quad C^2 = 1 .$$

It is not necessary here to enter into details about the well known question of invariance of electrodynamics under charge conjugation. The operator C commutes with the total Hamiltonian and its eigenvalues $c = \pm 1$ are therefore constants of motion. The eigenstates of C are the states of total charge zero i.e. containing photons and/or ⁽¹¹⁾ the same number of positons and negatons. Any state can be decomposed into a sum of two eigenstates of C :

$$(2) \quad C\Psi = \alpha\Psi_+ + \beta\Psi_- ,$$

with

$$(2') \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \text{and} \quad C\Psi_{\pm} = \pm\Psi_{\pm} .$$

The commutation of C with the total Hamiltonian implies that $|\alpha|^2$ and $|\beta|^2$ are constants independent of time.

Let us consider a state Ψ of well defined charge and its charge conjugate $\Psi' = C\Psi$. If the total charge is $\neq 0$, Ψ and Ψ' are two linearly independent state vectors and from $C(\Psi \pm \Psi') = \pm(\Psi \pm \Psi')$ we easily deduce that for Ψ (or Ψ'), $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$. Since this is true for any state of total charge $\neq 0$, no selection rules due to charge conjugation will occur for such states.

We are therefore left with the task of studying the eigenstates of C (since

⁽¹⁰⁾ The equation (1) must be read: C^2 is the physical identity. Indeed normalized state vectors are defined only up to a phase factor and C^2 can be equal to a phase factor. There is here no lack of generality to take $C^2 = 1$: see note ⁽²¹⁾.

⁽¹¹⁾ The expression and/or is used several times in this paper. « A and/or B » means « either A and B , or A , or B ».

any state of zero charge is a statistical mixture of two of them). One ⁽¹²⁾ is the vacuum Ψ_0 . It is sufficient to compare the eigenvalue of eigenstates of C with that of the vacuum; but, for simplicity, we define the eigenvalue of the vacuum as + 1.

1·2. States containing only photons. – A state with one photon is of the form $A^\mu \Psi_0$ where A^μ is the electromagnetic field. Now, from the commutation of C with the total Hamiltonian one has

$$(3) \quad CA^\mu j_\mu C^{-1} = A^\mu j_\mu .$$

The exchange of positons and negatons changes the sign of the current

$$(4) \quad Cj_\mu C^{-1} = - j_\mu ,$$

therefore

$$(4') \quad CA^\mu C^{-1} = - A^\mu ,$$

and

$$(4'') \quad CA^\mu \Psi_0 = CA^\mu C^{-1} \cdot C\Psi_0 = - A^\mu \Psi_0 .$$

An easy generalization of this gives:

The eigenvalue of C for states containing n photons is $c = (-1)^n$. This is equivalent to Furry's theorem and applies as well to virtual photons if one uses perturbation theory.

1·3. Positronium. – Positronium is the simplest and most interesting case of states with the same number of positons and negatons. We consider both bound and unbound states of positronium.

Indeed C commutes with the energy, momentum, orbital angular momentum, spin, parity operators (they are invariant under charge conjugation). A linear operator that commutes with each of a complete set of commuting

⁽¹²⁾ It is not trivial that the vacuum is an eigenstate of C because it can be described as a degenerate state, as for instance in the indefinite metric formalism (S. GUPTA: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 681 (1950); K. BLEULER: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567 (1950)) there all states of the vacuum are defined by « no electrons, no transversal photons, n longitudinal photons and n scalar photons present ». As will be seen from (4'') all these states which differ from each other by an even number of photons belong to the same eigenvalue of C .

dynamical variables is a function of them (13). Such a complete set commuting with C is easy to find in the case of positronium. Since C commutes with Lorentz transformations we choose as reference of coordinates the center of mass system; then \mathbf{L}^2 , L_z , \mathbf{S}^2 , S_z (orbital and spin momenta) for the large components of the electron field form a complete set of commuting dynamical variables. The Pauli principle requires that the states of positronium must be antisymmetrical with respect to space, spin and charge coordinates of the two particles.

The symmetry character corresponding to the exchange of

space coordinate is: $(-1)^L$;

spin coordinates is: $\xi = 2S - 1$ (for triplet states = 1, for singlet = -1);

charge coordinates is: c = the eigenvalue of C .

Therefore

$$(5) \quad c\xi(-1)^L = -1 .$$

Another constant of motion is the spatial parity u , that is the eigenvalue of the operator which reflects space coordinates through the origin. For positronium $u = -(-1)$: (see appendix); since c is also a constant of motion, it follows that ξ is also a constant of motion (4).

Bound states of positronium are generally not degenerate (outside the trivial J_z degeneracy) and therefore are eigenstates of C and S , but not of L : the orbital momentum is a mixture of L and $L + 2$ (for the large components). Since the mixture of L and $L + 2$ is irrelevant to our considerations we shall use the ordinary spectroscopic notations for simplicity. By emission of a photon the positronium undergoes transition from the state ${}^{\xi}L$ to the state ${}^{\xi'}L'$ and we must have for these states $c = -c'$ (since a photon is odd under charge conjugation). This selection rule can be written (14)

$$(6) \quad \xi(-1)^L = -\xi'(-1)^{L'} .$$

Consequently, there are lines existing in the corresponding hydrogen spectrum which are absolutely forbidden in the positronium spectrum (15):

(13) For instance: P. A. M. DIRAC: *The principles of quantum mechanics* (3^a ed. Oxford, 1947), p. 78.

(14) After this work was finished I heard from Prof. GELL-MANN that he has found these rules by perturbation theory some years ago but did not publish them. See also R. FERREL's thesis (Princeton) for the annihilation of positronium.

(15) Of course, these transitions can be induced by collisions with electrons of surrounding atoms or molecules, since the total charge of the electron field is no longer zero.

such lines are for instance the quadrupole transitions. However electric dipole transitions ($L' = L \pm 1$, $\xi' = \xi$) are allowed and therefore it seems practically impossible to obtain experimental test of this selection rule. Moreover the excluded lines are no longer forbidden when positronium is placed in an external field; indeed c is then no longer a good quantum number since the interaction of the external field is not symmetrical in the two particles of opposite charge.

There is also a selection rule for the decay of the positronium into n photons (4,14), since we must have

$$(7) \quad c = (-1)^n.$$

Hence for the lowest state of positronium:

3S state ($c = -1$) cannot decay into an even number of photons,

1S state ($c = 1$) cannot decay into an odd number of photons.

It must be noted (and this will be used in 2.4) that there are states of positronium for any given set of values of total angular momentum J and parity u , but not always with both values of c . The non existing sets of values are $J = 0$, $c = -1$ and $c = -u = -(-1)^J$.

Up to now, all solutions of problems in electrodynamics have been obtained by perturbation theory, which allows us to think at all stages of the calculation in terms of particles either real or virtual. The nature of the proofs given above shows that the results obtained apply as well to virtual particles. As it was the case for Furry's theorem, these results can therefore be useful for perturbation calculations since they predict what terms will vanish. For example, in the study of levels in positronium (16) we have a correction to the energy due to the virtual annihilation of the pair. All corrections (including radiative corrections to any order) due to one (or any odd number) quantum virtual annihilation will exist only for states with $c = -1$ and corrections due to two (or any even number) quantum virtual annihilation will exist only in states with $c = 1$. This agrees with published calculations (17,18).

1.4. *Case of other fields in interaction with the electromagnetic field.* — The extension of the preceding section to this case is obvious, but has less physical

(16) This was suggested to me by Dr. B. MOTTELSON.

(17) J. PIRENNE: *Arch. Sci. Phys. Nat.*, **29**, 265 (1947); see also B. V. BERETETSKI: *Journ. Exp. Theor. Phys.*, **19**, 673 (1949) and R. FERRELL's thesis (Princeton, 1952) where one γ virtual annihilation is treated.

(18) R. KARPLUS and A. KLEIN: *Phys. Rev.*, **87**, 849 (1952) where one and two γ annihilations are treated.

interest. For the case of charged fields of spin 1/2, it is sufficient to replace everywhere the word «electron» by proton, or μ -meson, etc.

As for positronium, it must also be noted that for a system of two charge conjugate bosons of spin 0, the excluded values of c are $c = -(-1)^L$ since $J = L$ and since Bose statistics requires $c(-1)^L = 1$. For a system of two charge conjugate spin 1 bosons with non zero rest mass, the only excluded value of c is $c = -1$ for $J = 0$.

2. – Extension to non-electromagnetic charge.

2.1. – The notation of charge can be extended to other couplings. There is no longer charge conservation, except if the theory is invariant under gauge transformations of the first type (19), i.e. under the group of transformations $G(\alpha)$, (where α is a real constant), which transform charged field operators according to (20):

$$(8) \quad G(\alpha)\psi G^{-1}(\alpha) = \psi e^{i\alpha}, \quad G(\alpha)\psi^* G^{-1}(\alpha) = \psi^* e^{-i\alpha}.$$

For charged boson fields we have

$$(9) \quad C\psi C^{-1} = \psi^*, \quad C\psi^* C^{-1} = \psi.$$

Without restriction of generality this also holds for fermion fields (i.e. fields described by spinor quantities) if a suitable equivalence transformation is made on them. For Dirac fields, this corresponds to the choice of a Majorana representation (2) of Dirac matrices.

The operators $G(\alpha)$ form a group R_2 isomorphic to the group of rotations around an axis. From (8) and (9) one sees that:

$$(10) \quad C^2 = 1, \quad CG(\alpha) = G(-\alpha)C.$$

(19) Unhappily, physicists used the same word «gauge» for two kinds of transformations, but they distinguish between the two of them (see W. PAULI: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203 (1941)) by calling the one used here «gauge transformation of the first type». This is a particular case of the second type in which α is a function of space and time coordinates. Transformation of the second type is used when the boson has at least one state of zero mass (K. LE COUTEUR: *Nature*, **165**, 106 (1951)).

(20) As usual in field theory papers, $*$ means the hermitian conjugate operator and therefore the complex conjugation for ordinary numbers. For spinor fields with several components, the corresponding index will be omitted in this paper, but these components will be considered as a one column matrix (whose elements are operators!). The symbol \sim means transposed.

Therefore C corresponds to a reflexion through a plane containing this axis. In other words, the operators C and $G(\alpha)$ form a group isomorphic to \mathcal{O}_2 the real orthogonal group in two dimensions (21) (group $C_{\infty v}$ of symmetry of heteronuclear molecules). All the non-equivalent irreducible unitary representations of \mathcal{O}_2 are known, all are two dimensional except the two \mathcal{D}_0^e

$$(11) \quad \mathcal{D}_m \quad \text{with} \quad m > 0 \quad G(\alpha) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{im\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-im\alpha} \end{pmatrix} \quad C \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(11') \quad \mathcal{D}_0^e \quad \text{with} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad G(\alpha) \rightarrow 1 \quad C \rightarrow \varepsilon.$$

These representations are univalent only for m integer. For simplicity we shall restrict m to be an integer in section 2 and 3.

The product of such representation is decomposed into irreducible representations according to:

$$(12) \quad \mathcal{D}_{m'} \times \mathcal{D}_{m''} = \mathcal{D}_{m'+m''} + \mathcal{D}_{|m'-m''|}, \quad m' \neq m''$$

$$(12') \quad \mathcal{D}_m(\text{I}) \times \mathcal{D}_m(\text{II}) = \mathcal{D}_{2m}(\square\square) + \mathcal{D}_0^+(\square\square) + \mathcal{D}_0^-(\square),$$

$$(12'') \quad \mathcal{D}_m \times \mathcal{D}_0^e = \mathcal{D}_m,$$

$$(12''') \quad \mathcal{D}_0^{e'}(\text{I}) \times \mathcal{D}_0^{e''}(\text{II}) = \mathcal{D}_0^e(\square\square) \quad \text{with} \quad \varepsilon = \varepsilon' \varepsilon''.$$

Let us call I and II the respective variables of the spaces of the representations $\mathcal{D}(\text{I})$ and $\mathcal{D}(\text{II})$. When these two representations have the same m the irreducible representations of \mathcal{O}_2 obtained by decomposition of the direct product $\mathcal{D}(\text{I}) \times \mathcal{D}(\text{II})$ are direct sums of equivalent irreducible representations of the permutation group of the two variables I and II ($\square\square$ is for symmetric, \square for antisymmetric). This occurs in (12') and (12''). It is important when we deal with two identical particles.

Any state vector belongs to the space of a representation (not irreducible in general). From its physical meaning, the vacuum must belong to the trivial representation, in which each element of the group is represented by the unit matrix. From section 1 we see that for electrodynamics a state with one photon belongs to \mathcal{D}_0 and a state with one electron to an arbitrary but fixed

(21) Of course reflexion through any plane also represents charge conjugation, and the product of two reflexions through planes making an angle $\beta/2$ with each other will multiply the field operators by the phase $e^{i\beta}$. What is not ambiguous however is the correspondence between charge conjugation, gauge invariance on one hand and the linear unitary representations of group \mathcal{O}_2 on the other hand.

representation \mathcal{D}_m , the two dimensions corresponding to the two independant charge conjugate states: one positon or one negaton. More generally a state vector which describes a system of p photons and q electrons is a vector in the space of the representation $(\mathcal{D}^-)^p \times (\mathcal{D}_m)^q$ and this vector is fixed as long as the system is isolated.

If we had taken in account charge conservation only, we would have dealt with the one dimensional representations d_m (with m integer ≥ 0) of the gauge invariance group R_2 . Irreducible representations of \mathcal{O}_2 are generally reducible representations of its subgroup R_2 ; the decomposition is according to

$$(13) \quad \mathcal{D}_m \rightarrow d_m + d_{-m}, \quad (m > 0)$$

$$(13') \quad \mathcal{D}_0^e \rightarrow d_0.$$

Different irreducible representations of \mathcal{O}_2 give different representations of R except \mathcal{D}_0^+ and \mathcal{D}_0^- which both give d_0 . Therefore it is only for states of tota charge zero that we shall have selection rules due to charge conjugation and not to charge conservation. These selection rules are imposed by the conservation of $e = c$ in the representations \mathcal{D}_0^e .

2·2. Case of neutral boson fields coupled with a Dirac field. — As an example of application of the general considerations given in 2·1 we now study the case of neutral boson fields coupled with a Dirac field. For simplicity we deal only with the customary meson theories (see for instance KEMMER ⁽⁹⁾). More precisely we consider only couplings linear in spin 0 or spin 1 boson fields or their first derivatives, and which do not contain derivatives of the Dirac. As is well known these couplings are of the form $B \cdot J$ where B is either one of the four boson fields or its gradiant (in four dimensions); the « dot » indicates a scalar product and J is one of the five invariants (scalar s , vector v , skew tensor t , pseudovector a and pseudoscalar p) that one can form with a Dirac field and its conjugate ⁽²²⁾:

$$(14) \quad J_i = \frac{1}{2} f[\tilde{\psi}^* F_i \psi - \tilde{\psi} \tilde{F}_i \psi^*]; \quad i, 1 \text{ to } 5.$$

The F_i are 1, 4, 6, 4, 1 linear independant four row four column matrices which, in the Majorana representation ⁽²⁾, are either symmetric or skew-

⁽²²⁾ More loosely J_i is often written $\tilde{\psi}^* F_i \psi$ since $\tilde{\psi}^* F_i \psi = -\tilde{\psi} \tilde{F}_i \psi^*$ when $\tilde{\psi}^* \psi + \tilde{\psi} \psi^* = 0$.

symmetric (23):

$$(15) \quad \tilde{F}_i = -\theta_i F_i \quad \text{with} \quad \theta_i = 1, -1, -1, 1, 1.$$

Thus from (9) we find that:

$$(16) \quad C J_i C^{-1} = \frac{1}{2} f [\tilde{\psi} F_i \psi^* - \tilde{\psi}^* \tilde{F}_i \psi] = \frac{\theta_i}{2} f [-\tilde{\psi} \tilde{F}_i \psi^* + \tilde{\psi}^* F_i \psi] = \theta_i J_i,$$

so that the charge conjugation of the interaction $B \cdot J$ requires

$$(17) \quad C B_i C^{-1} = \theta_i B.$$

The eight types of coupling will be denoted here (as in (7)) by Ss , Vv Aa Pp for those which do not involve derivatives of the boson field and by Sv , Vt , At , Pa for the others. The coupling constants f are now the charges of the fermions. The J 's are invariant under gauge transformation (see (8) and (14)) as are the B 's since they describe «strictly neutral» bosons; therefore there is charge conservation. Moreover (17) shows that:

Pp , Pa , Ss and Aa bosons belong to \mathcal{D}_0^+ , since then $\theta_i = 1$,

Vv , Vt , Sv and At bosons belong to \mathcal{D}_0^- , since then $\theta_i = -1$.

S and A bosons with *both* types of couplings are not described by irreducible representations and therefore do not lead to selection rules for charge conjugation; consequently S or A bosons considered in the following will have only one type of coupling.

The extension of Furry's theorem (made by FURRY himself (3)) is then straightforward:

THEOREM 1. A reaction between neutral bosons through one intermediary fermion field is forbidden if the total number of v and t couplings is odd (24).

(23) The notations used here are those of reference (7). For the equation (15) see W. PAULI: *Ann. Inst. H. Poincaré*, 6, 109 (1936), where the corresponding property for an arbitrary hermitian representation of Dirac matrices is proved. In Majorana representations, the matrix C of PAULI's paper is $= 1$.

(24) V and P bosons can have both their coupling terms; evidently Vv and Vt or Pp and Pa couplings of the same meson are only counted as one.

Indeed this reaction is represented by

$$(18) \quad \prod_i \mathcal{D}_0^{\varepsilon_i} = \prod_f \mathcal{D}_0^{\varepsilon_f},$$

which implies $\prod_a \varepsilon_a = 1$, where $i = \text{initial}$, $f = \text{final}$ and $a = \text{all}$. The most interesting case of application is the spontaneous decay of a boson (the other selection rules occurring in this case are listed in the appendix). For instance π^0 mesons (P bosons) cannot decay into an odd number of photons.

The extension of 1·3 to system of one fermion and its antiparticle is also straightforward; as before we have $c = -\xi(-1)^e$ and c is a good quantum number. The production of bosons by collision of a fermion with its anti-particle requires that $c' = c$ for P or Ss or Aa bosons, $c' = -c$ for V or At or Sv bosons. States with $c = 1$ cannot decay into an odd number of V , A or St bosons. States with $c = -1$ cannot decay into an even number of Vt , At , St bosons and/or any number of P , Ss , Aa bosons (other selection rules for annihilation are found in appendix).

2·3. Cases with no conservation of charge. — Of course charge conjugation can also be studied in theories without charge conservation. But it is then trivial. For instance, let us suppose that in 2·2 the fermion field is a field of MAJORANA (2) (i.e. «strictly neutral») particles. Then $\psi = \psi^*$ and (14) shows that $J_2 = J_3 = 0$. The theory is invariant under the group of two elements 1, C which has two representations: $c = \pm 1$. Each pair of fermions belong to $c = 1$ and can annihilate into any number of bosons. The same applies to the interaction of 2·2 where, in a Majorana representation,

$$(19) \quad J_i = \frac{1}{2} f[\tilde{\psi} F_i \psi + \tilde{\psi}^* F_i \psi^*],$$

$J_2 = J_3 = 0$. Here there is no charge conservation and only pairs of identical fermions can annihilate.

2·4. Most general case, with several kinds of charges. — The study of charge conjugation can be extended to any kind of couplings in present field theories (see also (?)). Here we want to study the most general case. Indeed a charged particle can be neutral for some charges: for example, electromagnetic-charged mesons have no nuclear charge. We need to consider only the charges which are conserved. To each kind of charge corresponds a gauge group. Let us call \mathcal{G} the direct product of all these gauge groups; the representations $d_{m_1, m_2, m_3, \dots}$ (with $m_i \geq 0$) are one-dimensional. Let us add to \mathcal{G} the (unique) operation of charge conjugation. The new group has two dimensional repre-

sentations $\mathcal{D}_{m_1, m_2, m_3, \dots}$, (with $m_i > 0$) and two one dimensional representations $\mathcal{D}_{0, 0, 0, \dots}^\varepsilon$, (with $\varepsilon = \pm 1$), to which belong self-charge conjugate systems. The extensions of the considerations of section 2·1 to this section 2·4 is obvious. Therefore selection rules due to charge conjugation will appear only for self-charge conjugate systems and those are very easy to select. When they do not contain an odd number of any kind of «strictly neutral» particles, no knowledge of the nature of the couplings is necessary for the determination of their representation. For self-charge conjugate systems containing only one pair of charged particles, we have already found the list of forbidden values of c for spin 1/2 (in 1·3) and spin 0 and 1 (in 1·4), since this does not depend on the nature of the charge.

For instance, from this there results the following rule: An $S\nu$ meson cannot decay into a positon-negaton pair (4·25) or into a pair of conjugated charged mesons of spin 0 (as $\pi^+ + \pi^-$) or spin 1 (26).

3. – Charge symmetry.

3·1. *Charge symmetry and charge conjugation.* – Charge symmetry is the hypothesis that the formalism is invariant under exchange of protons and neutrons. It seems to be a reasonable hypothesis for then it implies the equality of the specific nuclear nn and pp forces. Let us call N the operator exchanging p and n ; it also exchanges \tilde{p} (antiproton) and \tilde{n} (antineutron). We have $N^2 = 1$ and it is very easy to see from (8) and (9) that N commutes with C and $G(\alpha)$. Therefore N , C and $G(\alpha)$ form a group isomorphic to the direct product $(1 + N) \times \mathcal{O}_2$, isomorphic to the group D_∞ of symmetry of homonuclear diatomic molecules. Its irreducible representations are all given by the direct product of those of \mathcal{O}_2 and $1 + N$. The group $1 + N$ has only two representations labelled η (in them N is represented by η). The representation of $D_{\omega\nu}$ will then be noted as those of \mathcal{O}_2 but with η as left superscript. For instance:

$$(20) \quad {}^{\eta'} \mathcal{D}_0^{\varepsilon'} \times {}^{\eta''} \mathcal{D}^{\varepsilon''} = {}^{\eta} \mathcal{D}_0^{\varepsilon} \quad \text{with } \eta = \eta' \eta'', \quad \varepsilon = \varepsilon' \varepsilon''.$$

(25) This does not agree with the calculations of J. STEINBERGER: *Phys. Rev.*, **76**, 1180 (1949). I heard from Dr. H. FUKUDA that he has proved this selection rule by the use of the equivalence theorem.

(26) Charge conjugation also forbids the decay of a Aa meson into $\pi^+ + \pi^-$ but this is forbidden by parity conservation alone. Similarly, the annihilation into $\pi^+ + \pi^-$ is forbidden by charge conjugation for systems of proton-antiproton or neutron-antineutron with $\xi = 1$, $J = L$, but conservation of parity alone forbids such annihilation for $J = L$.

3·2. Extensions of Furry's theorem.

3·2·1 *Neutral mesons.* – We shall⁽²³⁾ write φ the invariant constructed from the meson fields themselves or the first order derivatives, J_{in} those made from the neutron field and J_{ip} those from the proton field. The interaction between a neutral meson field and the nucleons is

$$(21) \quad H_{0i} = \varphi_i(f_{in}J_{in} + f_{ip}J_{ip}) = \varphi_i[f_{i0}(J_{in} + J_{ip}) + f_{is}(J_{in} - J_{ip})],$$

with the following relation between the coupling constants⁽²⁷⁾

$$(22) \quad f_3 = \frac{1}{2}(f_n - f_p), \quad f_0 = \frac{1}{2}(f_n + f_p).$$

The effect of the operator N is easily seen to be $NJ_nN^{-1} = J_p$, $NJ_pN^{-1} = J_n$ and hence mesons with pure f_0 coupling correspond to the ${}^+\mathcal{D}_0^{\theta_i}$ representation and those with pure f_3 coupling to the ${}^-\mathcal{D}_0^{\theta_i}$. When one considers only these two kinds of neutral mesons, one gets the following extension of Furry's theorem^(7,8): (see⁽¹⁸⁾)

$$(23) \quad \prod_i \eta_i \mathcal{D}_0^{\varepsilon_i} = \prod_f \eta_f \mathcal{D}_0^{\varepsilon_f},$$

or

$$(24) \quad \prod_a \eta_a = 1 \quad \text{and} \quad \prod_a \varepsilon_a = 1.$$

Hence, THEOREM 2. A reaction between neutral mesons through the nucleon field is forbidden if either the number of f_3 couplings is odd, or the number of v and t couplings is odd.

Photons⁽²⁸⁾ have $f_n = 0$, therefore $f_0 = -f_3 = e/2$, thus they belong to the reducible representation ${}^+\mathcal{D}_0 + {}^-\mathcal{D}_0$; they are an example of non charged symmetric mesons. With such mesons we see that theorem 2 reduces indeed to theorem 1.

3·2·2. *Charged mesons.* – Only nucleons have nuclear charge: charged mesons belong to the \mathcal{D}_0 representations but, of course, they are not self-charge conjugate.

⁽²⁷⁾ Index 0 and 3 are chosen here in accordance with isotopic spin formalism: see 4·1.

⁽²⁸⁾ This is in accord with the current views that anomalous magnetic moments of nucleons are not due to direct interaction with magnetic fields but result from radiative processes through the charged meson field.

gate. The interaction between charged meson and nucleon fields is

$$(25) \quad H_{ci} = f_i(\varphi_i^* \cdot \tilde{\psi}_n^* F_i \psi_p + \varphi_i \cdot \tilde{\psi}_p^* F_i \psi_n).$$

For convenience, and without lack of generality, neutron and proton fields are made anticommuting. From $CH_{ci}C^{-1} = H_{ci}$ we can verify that

$$(26) \quad C\varphi_1 C^{-1} = \theta_i \varphi_i^* ; \quad C\varphi_i^* C^{-1} = \theta_i \varphi_i .$$

We also have

$$(27) \quad NH_{ci}N^{-1} = f_i(N\varphi_i^* N^{-1} \cdot \tilde{\psi}_p^* F_i \psi_n + N\varphi_i N^{-1} \cdot \tilde{\psi}_n^* F_i \psi_p),$$

therefore

$$N\varphi_i N^{-1} = \varphi_i^* , \quad N\varphi_i^* N^{-1} = \varphi_i .$$

Equation (26) and (28) can also be written

$$(29) \quad C(\varphi_i \pm \varphi_i^*)C^{-1} = \pm \theta_i(\varphi_i \pm \varphi_i^*) , \quad N(\varphi_i \pm \varphi_i^*)N^{-1} = \pm (\varphi_i \pm \varphi_i^*) .$$

Equation (29) means that $\varphi_i + \varphi_i^*$ belong to the ${}^+\mathcal{D}_0^{\theta_i}$ representation and $\varphi_i - \varphi_i^*$ to the ${}^-\mathcal{D}_0^{\theta_i}$ representation. Therefore a given charge conjugate state of a charged meson is represented by the reducible representation: ${}^+\mathcal{D}_0^{\theta_i} + {}^-\mathcal{D}_0^{\theta_i} = \sum_K {}^K \mathcal{D}_0^{K\theta_i}$ with $K = \pm 1$. We can now prove the following theorem (5,6)

THEOREM 3. A reaction between charged and neutral mesons through the nucleon field is forbidden if the total number of f_3 , r and t couplings is odd:

Indeed such a reaction is represented by

$$(30) \quad \prod_{i0} \eta_{0i} \mathcal{D}_0^{\varepsilon_{0i}} \prod_{ic} (\sum_K {}^K \mathcal{D}_0^{K\varepsilon_{ci}}) = \prod_{f0} \eta_{0f} \mathcal{D}_0^{\varepsilon_{0f}} \prod_{fc} (\sum_K {}^K \mathcal{D}_0^{K\varepsilon_{cf}}) .$$

Due to (20) this requires that there is at least one set of K_a such that

$$(31) \quad \prod_a \eta_{0a} K_a = 1 \quad \text{and} \quad \prod_a \varepsilon_{0a} K_a \varepsilon_{ca} = 1 ,$$

or by eliminating the set of K_a 's, we find the following condition,

$$(32) \quad \prod_* \eta_{0a} \varepsilon_{0a} \varepsilon_{ca} = 1 .$$

3·3. *Annihilation of nucleon antinucleon pairs.* — From the definition of N one sees that $\psi_n \pm \psi_{\bar{n}}$, $\psi_n^* \pm \psi_{\bar{n}}^*$ belong to the eigenvalue $\eta = \pm 1$ of N and to the two dimensional representation ${}^n\mathcal{D}_0$. For a system of a nucleon and antinucleon one readily sees that:

neutral systems, $n\tilde{n}$ or $p\tilde{p}$, belong to ${}^+\mathcal{D}_0^\varepsilon + {}^-\mathcal{D}_0^\varepsilon$ with $\varepsilon = -\xi(-1)^L$,
charged systems, $n\tilde{p}$ or $p\tilde{n}$, belong to ${}^+\mathcal{D}_0^\varepsilon + {}^-\mathcal{D}_0^{-\varepsilon}$ with $\varepsilon = -\xi(-1)^L$.

Hence the selection rules for emission of a meson by collision of a nucleon and an antinucleon only exist for neutral mesons emitted by neutral systems and are those of 1·4.

From 2·2 where the representations of mesons and photons are given, it is easy to see the corresponding rules for annihilation and this is left to the reader (see also the appendix for absolute selection rules due to angular momentum and parity conservation). As an example, in table I, the possible annihilations into photons and/or π -mesons (considered as pseudoscalar symmetric (29)) are given for S -states (30)

TABLE I. — *Possible and forbidden modes of annihilation of an antinucleon under the consideration of conservation of angular momentum, conservation of parity, charge conjugation and charge symmetry.*

Systems	States	Allowed into 2 particles	Allowed into 3 particles	Forbidden into
$n\tilde{n}$ or $p\tilde{p}$	3S	$\pi^0 + \gamma$ $\pi^+ + \pi^-$	3γ $\gamma + 2\pi^0$ $\gamma + \pi^+ + \pi^-$ $\pi^0 + \pi^+ + \pi^-$	any number of π^0 and/or an even number of γ
	1S	2γ	$3\pi^0$ $2\gamma + \pi^0$ $\pi^0 + \pi^+ + \pi^-$	an odd number of γ and zero or any number of π^0
$n\tilde{p}$ or $p\tilde{n}$	3S	$\pi^\pm + \pi^0$ $\pi^\pm + \gamma$	$\pi^\pm + 2\gamma$ $\pi^\pm + \gamma + \pi^0$	charged π and zero or any even num- ber of π^0
	1S		$2\pi^\pm + \pi^\pm$ $\pi^\pm + 2\pi^0$ $\pi^\pm + \pi^0 + \gamma$ $\pi^\pm + 2\gamma$	an even number of π mesons only

(29) N. KEMMER: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **34**, 354 (1938).

(30) As an example of study for the construction of table I, we give here the re-

3·4. Remarks.

3·4·1. *Selection rules due to charge symmetry only.* – There are also selection rules due only to the conservation of η , the eigenvalue of N . They will appear for self-charge symmetric states. Such selection rules, due to charge symmetry only, and not to charge conjugation, do not belong properly to the subject of this paper. See however 4·2.

3·4·2. *Validity of selection rules due to charge symmetry.* – These selection rules are not absolute since they depend on the neglect of the electromagnetic interactions. However, electromagnetic coupling is weak compared to nuclear coupling and the selection rules due to charge conjugation combined with charge symmetry are good approximations. The reader is referred to the paper of PAIS and JOST (8) for an interesting discussion on this point.

3·4·3. *Extension to other couplings.* – The study of charge symmetry combined with charge conjugation can be extended to other kinds of couplings involving the nucleons. As an example the reader is referred to a previous work of the author (7), where an extension of Furry's theorem is established for direct coupling between a pair of nucleons and another pair of fermions as in the Fermi theory of β -radioactivity.

4. – Isotopic formalism and charge conjugation.

4·1. *Charge independence.* – The use of the isotopic spin formalism is well known and here only results without proofs will be quoted. Neutrons and protons are considered as states of the same particle, the nucleon. These states are labelled by a two valued index: i.e. the nucleon field is represented as a two line matrix $\psi = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_r \end{pmatrix}$: We shall use in the following the well known Pauli matrices

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

presentations corresponding to a system of two charged mesons:

$$\left(\sum_K {}^K \mathcal{D}_0^{K\epsilon} (\text{I}) \right) \cdot \left(\sum_K {}^K \mathcal{D}_0^{K\epsilon} (\text{II}) \right) = {}^{+2} \mathcal{D}_0^+(\square\square) + {}^{-2} \mathcal{D}_0^-(\square\square) + {}^{-2} \mathcal{D}_0^-(\square\square)$$

and it is easily seen that systems of charge 2 (as $2\pi^+$ or $2\pi^-$) belong to ${}^{+2} \mathcal{D}_0^+(\square\square) + {}^{-2} \mathcal{D}_0^-(\square\square)$ (it must be of course $\square\square$) and the self-charge conjugate systems ($\pi^+ \pi^-$) belong either to ${}^{+2} \mathcal{D}_0^+(\square\square)$ (then $c = \eta = 1$ and $J = L$ is even, $u = 1$) or to ${}^{-2} \mathcal{D}_0^-(\square\square)$ (then $c = \eta = -1 = u$, $J = L$ is odd).

They satisfy

$$(33) \quad \tilde{\tau}_i = \tau^* \quad \text{with } i = 0 \text{ to } 3.$$

Charge independance is obtained by invariance under the group R_3 of rotations in the three dimensional isotopic spin space. These rotation of an angle α around an axis whose orientation is given by the unit vector \mathbf{n} will be denoted by: $R(\alpha, \mathbf{n})$. The nucleon has an isotopic spin $1/2$, i.e. $R(\alpha, \mathbf{n})$ induces on ψ and ψ^* the linear transformations

$$(34) \quad R(\alpha, \mathbf{n})\psi R^{-1}(\alpha, \mathbf{n}) = \exp[i(\alpha/2)\tau, \mathbf{n}]\psi = \cos \alpha/2 + i\tau \cdot \mathbf{n} (\sin \alpha/2)\psi,$$

$$(34') \quad R(\alpha, \mathbf{n})\psi^* R^{-1}(\alpha, \mathbf{n}) = \exp[-i(\alpha/2)\tau^*, \mathbf{n}]\psi^* = (\tilde{\psi}^* \exp[-i(\alpha/2)\tau, \mathbf{n}])_{\text{transposed}}$$

where τ means τ_1, τ_2, τ_3 .

With ψ and its conjugate one can expect to form two quantities (see (36)):

$$D_{1/2} \times D_{1/2} = D_0 \times D_1,$$

of isotopic spin $T=0$ and $T=1$; they are $\tilde{\psi}^*\psi$ for $T=0$ and $\tilde{\psi}^*\tau\psi$ for $T=1$. Hence there are two possible meson theories giving charge independent forces; as well known the case with $T=0$ corresponds to a neutral meson theory with coupling f_0 ; the case $T=1$ corresponds to the symmetrical (29) meson theories where the meson has three isotopic states of electric charge -1, 0, 1. The couplings are for both theories:

$$(35) \quad H = \sum_r f_r \varphi_{ir} [\tilde{\psi}^* \tau_r F_i \psi - \tilde{\psi} \tilde{\tau}_r \tilde{F}_i \psi^*] = \sum \varphi_{ir} J_{ir},$$

with $r=0$ for $T=0$ and $r=1$ to 3, $f_1=f_2=f_3$ for $T=1$.

4.2. Charge symmetry. — We could have treated charge symmetry as we treated charge independence by the invariance under a group isomorphic to O_2 . Indeed this can be done in the isotopic spin formalism. Charge independence which is obtained by invariance under a R_3 group is a particular case of charge symmetry which is obtained by the invariance under the subgroup O_2 of R_3 , isomorphic to the group composed of the rotations around the third axis of the isotopic space and the reflexions through planes containing this axis.

The irreducible representations of R are denoted by D_J (with $2J$ integer ≥ 0) and the reduction of their products into irreducible representations is given by

$$(36) \quad D_J \times D_{J'} = D_{J+J'-1} + D_{J+J'-3} + \dots + D_{|J-J'|}.$$

They are generally reducible representations of the subgroup \mathcal{O}_2 of R_3 , and their decomposition is given by

$$(37) \quad D_J \rightarrow \mathcal{D}_{1/2} + \mathcal{D}_{3/2} + \dots + \mathcal{D}_J \quad \text{for } J \text{ half integer ,}$$

$$(37') \quad D_J \rightarrow \mathcal{D}_0^{(-1)^J} + \mathcal{D}_1 + \dots + \mathcal{D}_J \quad \text{for } J \text{ integer .}$$

Since here charge symmetry is described by the invariance under the same group, \mathcal{O}_2 , as is used in section 2 for the study of charge conjugation, the consideration of section 2 can be applied here. Here selection rules due to charge symmetry will only appear for self charge symmetries-states, i.e. states with the same number of p and n (or \tilde{p} and \tilde{n} !) and/or any number of neutral mesons (even if S or A mesons have both types of couplings) and pair of conjugate charged mesons. The most interesting case for the application of such rules are nuclear reactions with such nuclei as ${}_1\text{H}^2$, ${}_2\text{He}^4$, ${}_3\text{Li}^6$, ${}_4\text{Be}^8$, ${}_5\text{B}^{10}$, ${}_6\text{C}^{12}$, ${}_7\text{N}^{14}$, ${}_8\text{O}^{16}$ Each level of these nuclei is an eigenvector of the operator N (exchange of p and n) and the eigenvalue η is a good quantum number. Indeed equation (37') shows that $\eta = (-1)^T$, where T is the total isotopic spin of the nucleus when the hypothesis of charge independant forces is made. For instance, the reaction ${}_8\text{O}^{16}(d, \alpha) {}_7\text{N}^{14*}$ is described by

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_8\text{O}^{16} + {}_1\text{H}^2 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_7\text{N}^{14*} , \\ \mathcal{D}_0^+ \times \mathcal{D}_0^+ \rightarrow \mathcal{D}_0^+ \times \mathcal{D}_0^\eta \end{array} \right.$$

since the ground state of all these nuclei has $T=0$. Therefore $\eta=1$ and excited states of ${}_7\text{N}^{14*}$ with $\eta=-1$ cannot appear in this reaction, e.g. first excited state. This has been recently emphasized by KROLL (31).

4·3. Charge conjugation. — We can still define C by (9), where now ψ has a two value isotopic index. On the explicit value of the τ_i matrices we can verify that

$$(39) \quad \tau_2 \tilde{\tau}_i = \tau_2 \tau_i^* = \zeta_i \tau_i \tau_2 \quad \text{with} \quad \zeta_i = 1; -1, -1, -1 .$$

Let us consider the following rotation in isotopic space $M = R(\pi, \mathbf{n}_2)$ where \mathbf{n}_2 has components $(0, 1, 0)$. We note that C and M commute: $CM = MC = U$ with

$$(40) \quad U \psi U^{-1} = i \tau_2 \psi^*, \quad U \psi^* U^{-1} = i \tau_2 \psi .$$

(31) I heard it from Prof. WEISSKOPF at the summer school des Houches. See also the quotation of K. K. ADAIR: *Phys. Rev.*, **87**, 1041 (1952), in a foot note.

Let R be an arbitrary rotation $R(\alpha, \mathbf{n})$ in isotopic space; we have

$$(41) \quad UR\psi R^{-1}U^{-1} = i\tau_2 \exp[i(\alpha/2)\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}] \psi^*, \quad RU\psi U^{-1}R^{-1} = i \exp[-i(\alpha/2)\boldsymbol{\tau}^*, \mathbf{n}] \tau_2 \psi^*$$

from (39)

$$(42) \quad RU\psi U^{-1}R^{-1} = i\tau_2 \exp[i(\alpha/2)\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}] \psi^* = UR\psi R^{-1}U^{-1}.$$

Similarly

$$(43) \quad UR\psi^* R^{-1}U^{-1} = i \exp[i(\alpha/2)\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}] \tau_2 \psi = RU\psi^* U^{-1}R^{-1}.$$

Therefore U commutes with every $R(\alpha, \mathbf{n})$. The group generated by rotations in isotopic space and charge conjugation is therefore isomorphic to the group \mathcal{O}_3 , i.e. the direct product $(1 + U) \times R_3$. That is the group of rotations and reflexions in isotopic space.

The irreducible representations of this group are the direct product of those of R_3 and those of the group of two elements. They are denoted by D_j^ε with $\varepsilon = \pm 1$. The case with $\varepsilon = -1$ corresponds to the «pseudo» quantities. With the convention of this paragraph, U , the inversion through the origin in isotopic space has the eigenvalue $t = \varepsilon(-1)^d$. This quantity is the «parity» in isotopic space.

Representations of the mesons. — The invariance of the interaction (see (35)) with respect to U gives:

$$(44) \quad UH U^{-1} = f_{ir} U\varphi_{ir} U^{-1} [\tilde{\psi} i\tilde{\tau}_2 \tau_r i\tau_2 F_i \psi^* - \tilde{\psi}^* i\tilde{\tau}_2 \tilde{\tau}_r i\tau_2 \tilde{F}_i \psi],$$

and from (15) and (39)

$$(44') \quad UH U^{-1} = \zeta_r \theta_i U\varphi_{ir} U^{-1} J_{ir}.$$

Therefore

$$(45) \quad U\varphi_{ir} U^{-1} = \theta_i \zeta_r \varphi_{ir}.$$

For mesons $t = \theta_i \zeta_r$; hence the value of the ε of their representation. Mesons with $T = 0$ belong to the D_0^0 representation and mesons with $T = 1$ belong to $D_1^{\theta_i}$.

For instance, the pseudoscalar symmetric mesons (as very likely π -mesons are) belong to D_1^+ .

Representations of the nucleons. — Nucleons belong to the reducible representation $D_{1/2}^+ + D_{1/2}^-$.

4·4. Selection rules specific to charge conjugation and charge independence. — The only new selection rules due to charge conjugation, which can be expected by restricting the hypothesis of charge symmetry to charge independence, will arise from the identification of corresponding charged and neutral mesons as different isotopic states of the same particle.

For instance, if the isotopic spin is a good quantum number in the reaction (32)

$$(46) \quad \zeta^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0,$$

it is easy to see that ζ^\pm must be a vector meson. The possibility of ζ^\mp being a $S\psi$ meson, which was allowed by charge symmetry is now forbidden by charge independence.

Acknowledgements.

This work was mainly done at the « École d'Eté de Physique Théorique des Houches » to which I am very grateful for its stimulating atmosphere of work. I wish to thank many physicists of Les Houches and Copenhagen for interesting discussions. I am indebted to the French Services des Poudres and to the CERN Theoretical study group for financial support.

APPENDIX

We restrict ourselves (33) to systems composed of particles of spin 0, 1/2, and 1; the case of particles of spin 1 with mass zero (γ) must be considered separately. The total angular momentum J and the parity u are given for the center of mass frame of reference.

Conservation of the angular momentum.

One spin 0 particle + one γ . . . $J \neq 0$, see for instance (36)

Two γ $J \neq 1$ (34,35)

Two identical spin 0 particles . . . J even, see for instance (36)

(32) F. C. POWELL at the Copenhagen conference, June 1952.

(33) The complete list for particles of any spin is given in (37) and notes with G. BONNEVAY to appear shortly in *C. R. Acad. Sci. Paris*.

(34) L. D. LANDAU: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **60**, 207 (1948); also E. WIGNER quoted by J. STEINBERGER: *Phys. Rev.*, **76**, 1180 (1949).

(35) C. N. YANG: *Phys. Rev.*, **77**, 242 (1950).

(36) D. C. PEASLEE: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 845 (1950).

Conservation of parity.

Particle $S = \text{scalar}$, $V = \text{vectorial}$, $A = \text{pseudovectorial}$, $P = \text{ps. sc.}$

J	0	1	1	0
u	+	-	+	-

Two particles of spin 0 $u = (-1)^J u_1 u_2$, ⁽³⁶⁾

One of spin 0, one of spin 1 . . . if $J = 0$, only $u = -u_1 u_2$, ⁽³⁷⁾

Two γ if J odd, only $u = +1$ ^(34, 35)

Three particles of spin 0 if $J = 0$, only $u = u_1 u_2 u_3$ ⁽³⁷⁾

Note that for a system of one Dirac particle and its antiparticle, all sets of J , u are allowed, but $u = -(-1)^L$, where L and/or $L \pm 2$ is the relative orbital momentum of the large components ^(35, 37).

⁽³⁷⁾ L. MICHEL: *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **234**, 703 and 2161 (1951).

RIASSUNTO (*)

L'autore fa uno studio sistematico sull'invarianza delle teorie dei campi rispetto alla coniugazione delle cariche, allo scopo di indicare *tutte* le possibili regole di selezione derivanti dalla coniugazione delle cariche, da sola o combinata con la simmetria o l'indipendenza delle cariche. Si dimostra che usando il formalismo di spin isotopico l'invarianza rispetto alla coniugazione delle cariche corrisponde alla conservazione della parità isotopica.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

NOTE TECNICHE

Un odoscopio meccanico.

C. MILONE

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto il 28 Gennaio 1953)

Riassunto. — Viene descritto un odoscopio meccanico di costruzione semplice, che è stato impiegato con risultato soddisfacente.

1. — Nel corso di un lavoro sugli elettroni e fotoni negli sciami di raggi cosmici ⁽¹⁾ è stato costruito un odoscopio meccanico il quale, sebbene realizzato con molta economia di mezzi, ha dato un risultato soddisfacente. Esso permette un immediato controllo della registrazione durante la misura, consente una facile analisi della registrazione, e richiede un breve intervallo di tempo (dell'ordine di un secondo) fra una registrazione e la successiva.

2. — Il dispositivo per la registrazione è rappresentato nella fig. 1. L'impulso pilota comanda il dispositivo per l'avanzamento della carta e la pennina p_1 ; le coincidenze fra l'impulso pilota e gli impulsi dei contatori 2, 3, ..., n , comandano le pennine p_2 , p_3 , ..., p_n , scriventi sulla carta.

Il dispositivo per l'avanzamento della carta è costituito da un elettromagnete il quale ad ogni impulso fa avanzare di un dente una ruota dentata; questa trasmette il suo moto di rotazione ad uno di due cilindri di gomma i quali trascinano la carta; quest'ultima scorre entro apposite guide ed avanza di circa 6 mm ad ogni scatto della ruota dentata.

La trasmissione del moto dalla ruota dentata motrice al cilindro di gomma è ottenuta mediante un'altra ruota dentata il cui asse è costituito da diversi fili di acciaio riuniti insieme. Tale asse, non essendo perfettamente rigido, subisce una debole deformazione elastica di torsione prima di trasmettere il moto di rotazione, e ritorna allo stato non deformato alla fine del moto; di conseguenza fra l'istante di arrivo dell'impulso pilota e l'inizio dell'avanza-

⁽¹⁾ C. MILONE: Comunicazione al congresso della S.I.F., 1952.

mento della carta passa una frazione di secondo, sufficiente perché le pennine eccitate lascino il loro segno sulla carta prima che questa si metta in moto. Quando la carta ha terminato il suo moto, cioè dopo circa un secondo, il dispositivo è pronto per una registrazione successiva.

Le pennine p_1, p_2, \dots, p_n sono costituite da altrettante barrette di ottone girevoli attorno ad un asse; ciascuna di esse ha ad una estremità un pezzetto

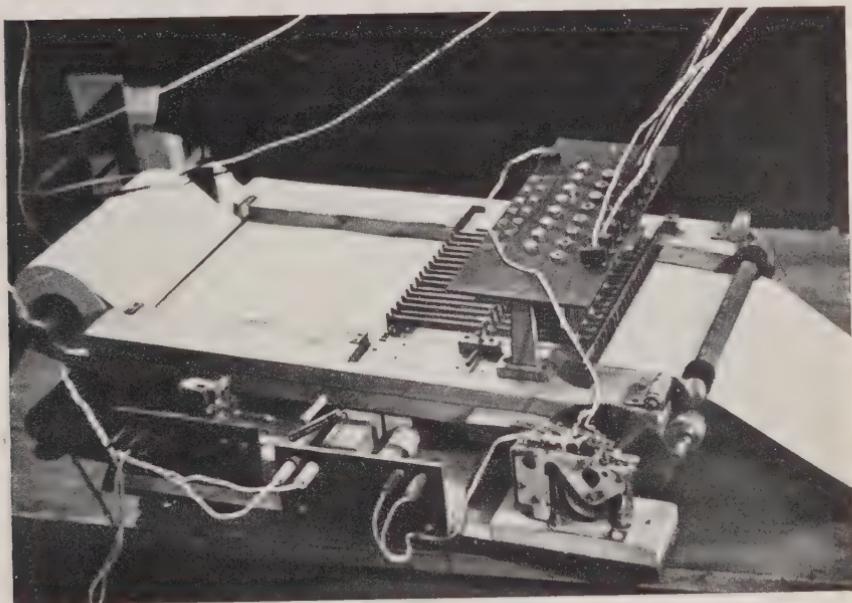


Fig. 1.

di ferro ed all'altra estremità un cilindretto cavo (contenente l'inchiostro) il quale termina con una punta scrivente. In condizione di riposo ciascuna di tali punte dista circa 1 mm dalla carta, mentre ognuno dei pezzetti di ferro dista $1 \frac{1}{2}$ mm dal nucleo di un piccolo elettromagnete. Ogni qualvolta si verifica una coincidenza fra l'impulso pilota ed un contatore generico, viene eccitato un corrispondente elettromagnete ed una corrispondente pennina lascia un segno sulla carta. È stata eseguita una messa a punto del dispositivo controllando che ogni elettromagnete aziona solo la pennina corrispondente.

La registrazione si presenta come una successione di righe (una per ogni evento pilota) distanti l'una dall'altra circa 6 mm. In ognuna di queste righe sono tracciati dei punti corrispondenti alle pennine eccitate. Eseguendo una serie di molte registrazioni con tutte le pennine eccitate dal solo impulso pilota si ottiene una successione di righe con n punti per riga; nelle varie righe i punti segnati da una stessa generica pennina risultano perfettamente incolonnati. Ciò dipende dal fatto che il movimento dei cilindretti porta inchiostro è vin-

colato entro i fori di una barra metallica porta cilindri; ogni pennina, quindi, segna un punto in corrispondenza del centro del foro corrispondente.

Il dispositivo è stato progettato per 32 pennine ed è costituito da due parti uguali ($16 + 16$) disposte simmetricamente rispetto alla barretta porta cilindri; questa ha 32 fori allineati entro i quali scorrono i 32 cilindretti con le punte scriventi. Nella fig. 1 si vede montata solo una delle due parti (16 pennine).

3. — Per l'analisi della registrazione è stato costruito un dispositivo costituito da una guida entro cui scorre la carta sulla quale è stata eseguita la registrazione e da una lamina metallica con n fori disposti come gli n fori della barretta porta-cilindri. Sulla lamina metallica sono scritti in corrispondenza dei vari fori i numeri 1, 2, ..., n , sicché risulta facile, facendo scorrere la carta nell'apposita guida, leggere i numeri corrispondenti agli eventi coincidenti con l'evento pilota.

La costruzione è stata eseguita dal Sig. C. D'ARRIGO, meccanico in questo Istituto.

S U M M A R Y (*)

The paper relates about a simple mechanical hodoscope, which has given satisfactory results.

(*) *Editor's translation.*

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Spettro Raman di bassa frequenza dell'aragonite.

G. OLIVELLI

Istituto di Fisica dell'Università - Pavia

(ricevuto il 23 Gennaio 1953)

Un cristallo di aragonite consistente in un geminato a forma di prisma pseudo-esagonale è stato illuminato con la 2537 Å Hg parallelamente alla bisettrice degli assi ottici. Il vettore elettrico della luce eccitatrice risultava così parallelo ai piani dei CO₃. La luce diffusa è stata raccolta attraverso una faccia laterale del prisma pseudo-esagonale. Per ciascuna delle righe Raman di bassa frequenza è stato misurato il rapporto $\varrho = I_2/I_1$; essendo I_1 e I_2 l'intensità della componente diffusa con vettore elettrico rispettivamente normale e parallelo al piano definito dalla direzione di incidenza e dalla direzione di osservazione. I valori ottenuti, limitatamente alle righe di bassa frequenza dovute alle oscillazioni esterne, sono dati dalla tabella I (1).

A causa delle piccole dimensioni del cristallo a nostra disposizione si è dovuto aumentare il più possibile l'intensità del fascio di luce incidente a scapito del suo parallelismo. I dati della tabella hanno perciò solo valore indicativo.

Delle righe Raman di bassa frequenza

sicuramente osservate, soltanto una delle più deboli ($\nu = 277$ cm⁻¹) presenta uno stato di polarizzazione simile a quello

TABELLA I.

Frequenza in cm ⁻¹	Intensità in u. arb.	Fattore di depolar. ϱ
113	1	< 1
154	7,5	0,25
180	1,5	0,3
190 (?)	—	> 1 (?)
206	4	0,3
240	1	0,7
277	0,5	1,4

delle due righe Raman di bassa frequenza della calcite ($\varrho > 1$). Analogo stato di polarizzazione presenterebbe una riga a 190 cm⁻¹, non ben separata dalle righe vicine, e perciò alquanto dubbia.

Se le righe che presentano tale stato di polarizzazione sono realmente due, ciò potrebbe spiegarsi, analogamente al caso della calcite (2), con un accoppiamento

(1) L. GIULOTTO e G. OLIVELLI: *Nuovo Cimento*, **5**, 52 (1948); *Journ. of Chem. Phys.*, **16**, 555 (1948). Vedi anche A. KASTLER: *Compt. Rend.*, **227**, 1024 (1948); *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **28**, 349 (1948).

(2) Questi risultati sembrano alquanto in disaccordo con quelli trovati da L. COUTURE (*Compt. Rend.*, **218**, 669 (1944)).

fra oscillazioni angolari degli ioni CO_3 e oscillazioni di traslazione. Mentre per la calcite la rotazione dello ione avviene attorno alla direzione della traslazione, nel caso dell'aragonite semplici considerazioni sulla struttura reticolare fanno ritenere che l'asse di rotazione e la direzione di traslazione debbano essere con

una certa approssimazione fra loro normali. L'intensità delle righe attribuibili a oscillazioni pendolari degli ioni CO_3 è risultata nella aragonite notevolmente più debole che nella calcite.

Ringrazio il dott. FORMIGONI per l'aiuto prestato nell'esecuzione degli spettri.

Observation of the Decay at Rest of a Heavy Particle.

A. BONETTI, R. LEVI SETTI and M. PANETTI

*Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano*

G. TOMASINI

Istituto di Fisica dell'Università - Genova

(ricevuto il 28 Gennaio 1953)

During an investigation on meson decays in nuclear emulsions exposed at high altitude, carried on as a collaboration between the Genoa and Milan group, a particular event has been observed by G. TOMASINI, suggesting the existence of an unstable charged particle heavier than the proton.

The plates in which the event occurred were Ilford G5, 400 μ thickness, exposed in sandwiches for two hours at about 20 000 m, packed into a Dewar filled with ice (*).

A primary track, J, travelling downwards, stops in the emulsion as it is shown by the variation of the ionization along its path, and gives rise to a single fast secondary, s. The photomicrographs of fig. 1 show the point of decay together with the appearance of the track

J at 5000 and 10 000 μ residual range. The J track is 10 760 μ long in the plate where the decay was observed, further 5 000 μ have been found in the facing plate. The secondary travels 120 μ , before escaping from the surface of the plate, at a very small angle of dip. This fact, together with some local distortion, has made impossible an unambiguous identification of the continuation of the track in the facing plate.

The great length of the primary made possible an accurate measure of its mass: scattering-range measurements have been made so far, giving on the total length of 15 760 μ a mass value of 2500 ± 345 m_e. The multiple scattering has been measured by the angular method on 281 overlapping cells, the given probable error taking into account the error due to smoothing. The probable statistical error only is 9%.

It would be desirable to have a better knowledge of the ionization and scattering of the secondary particle. The missing of its tracing in the paired plate prevented us by getting sufficient in-

(*) The plates belong to a batch kindly lent to us by the Centre de Physique Nucléaire de Brussels; they have been flown during a collaboration between the University of Rome and the Brussels Centre.

formation. Its grain-counting, for what can be said on 120μ , is practically at the minimum ionization value; its scattering only allows the ruling out of the secondary particle being a slow electron.

Attribution of a scheme of decay is also made impossible by the lack of information on the secondary; the statistical accuracy involved in mass measurement of the primary particle seems

however to exclude an identification of the described decay at rest with the decay of the K-particles.

The mass value obtained, together with the knowledge of the direction of motion of the particle J, makes it so very likely that we are dealing here with the decay of a particle of transprotontic mass with the emission of a fast secondary.

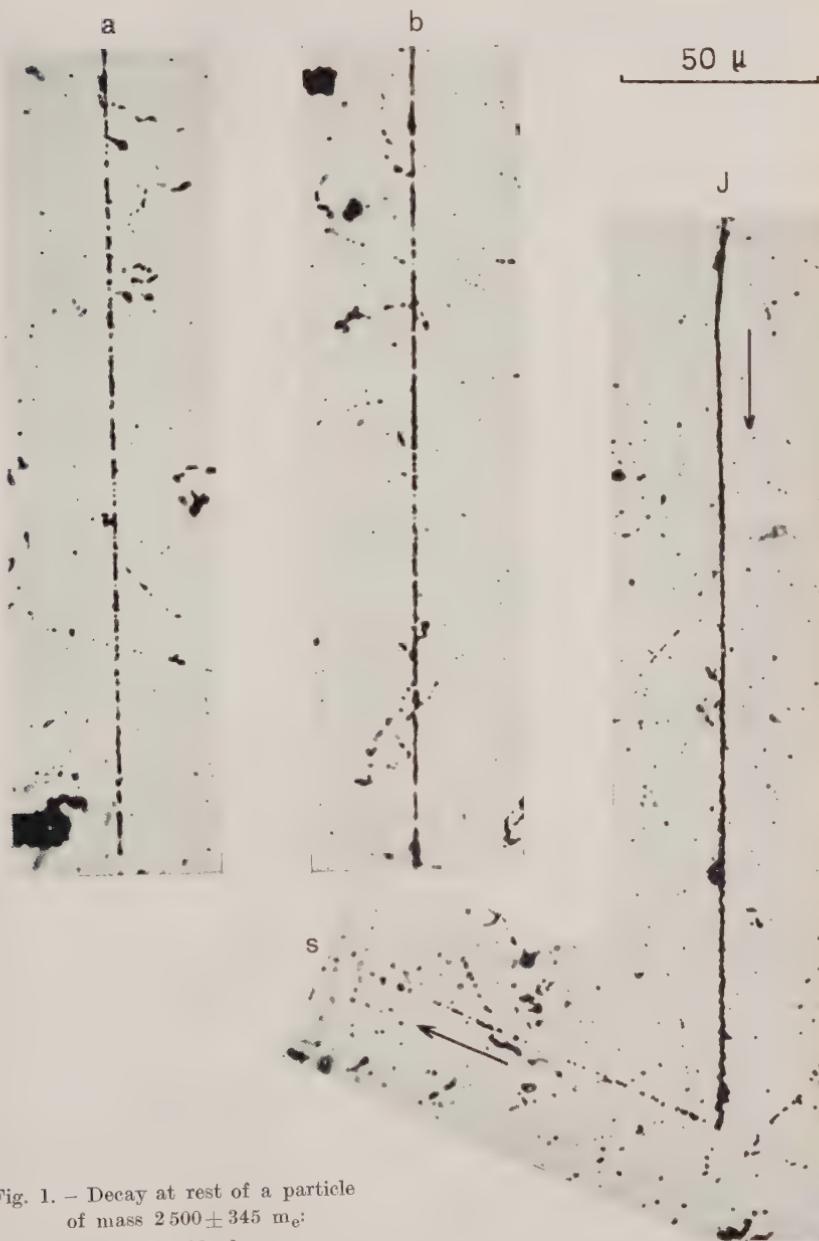


Fig. 1. — Decay at rest of a particle
of mass $2500 \pm 345 m_e$:

- a) $10\,000 \mu$ residual range;
- b) $5\,000 \mu$ residual range.

Observed by G. TOMASINI

Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Reaktion $\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$.

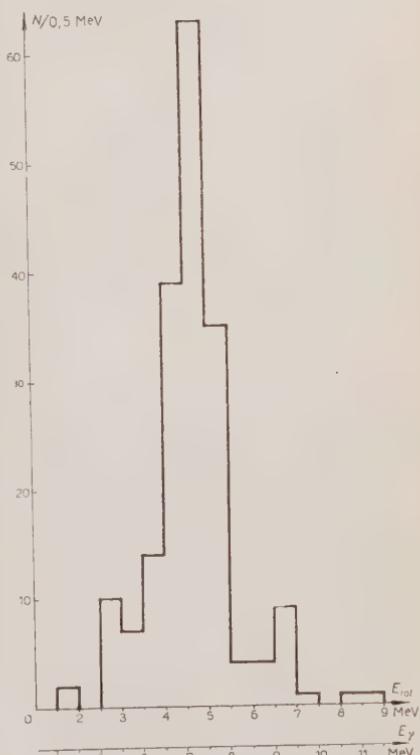
P. STOLL und M. WÄCHTER

Physikalisches Institut der Eidg. Technischen Hochschule - Zürich

(ricevuto il 5 Febbraio 1953)

Die Spaltung des Li^7 durch γ -Strahlen ($\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$; $Q = 2,465$ MeV) ist in mehreren Arbeiten⁽¹⁾ (⁽²⁾) eingehend untersucht worden. Dabei benützte man bis jetzt durchwegs monochromatische Gammaquellen: ($\text{Li}-\gamma$ -Strahlung: 17.6; 14.8 und 12.3 MeV und Fluor- γ -Strahlung: E_γ : 6.13 und 6.9 MeV). Die ausgesprochenen Resonanzstellen im Wirkungsquerschnittsverlauf der Reaktionen $\text{B}^{10}(\gamma, D)2\text{He}^4$ und $\text{B}^{11}(\gamma, T)2\text{He}^4$ ⁽³⁾, die mit bekannten Niveaus im B^{10} resp. B^{11} zusammenfallen, zeigen, daß diese Anregungs-Absorptionskurven bei leichten Kernen ein geeignetes Mittel sind, angeregte Zustände auszumessen. Unsere Versuche am Lithium bestätigen die Vermutung, daß diese Reaktionen über einen Compoundkern gehen. Die Reaktion am Li^7 ist vom theoretischen Standpunkt aus wertvoller als die entsprechenden Reaktionen am B^{10} und B^{11} , weil die relative Einfachheit der Verhältnisse eher eine theoretische Behandlung zuläßt.

Kodak NTla-Platten (200 μ) mit Li-Ein-



(¹) E. W. TITTERTON: *Proc. Phys. Soc.*, **63**, 915 (1950).

(²) H. NABIOHLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 701 (1952).

(³) R. MÜLLER und P. STOLL: *Nuovo Cimento*, **9**, 1232 (1952).

Fig. 1. - Energiedistribution von 190 Spuren der Reaktion $\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$.

lagerung wurden mit einem kontinuierlichen Spektrum von γ -Strahlen bis zu 15 MeV bestrahlt. Die Temperaturrent-

tischen Gründen nur selten auftreten (höhere Q -Werte).

Für die absolute Eichung der Kurve Fig. 2 kann der Wert für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion in Bezug auf die monochromatische Fluor- γ -Strahlung (*) $\sigma = (2,65 \pm 0,8) \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2$ (2). benutzt werden.

Das Betatronpektrum wurde nach SCHIFF (4) berechnet und zugleich eine Korrektur für die Austrittswahrscheinlichkeit der Spuren aus der empfindlichen Schicht angebracht.

Das Hauptmaximum des Wirkungsquerschnittsverlaufes ($\sigma_{\max} = 1,3 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$) $\Gamma \cong 1,5$ MeV liegt bei $E_\gamma = 7,25$ MeV und fällt mit einem aus andern Experimenten bestimmten Niveau (7,46 MeV $J = 5/2^-$) (4) zusammen. Durch magnetische Dipolabsorption der einfallenden

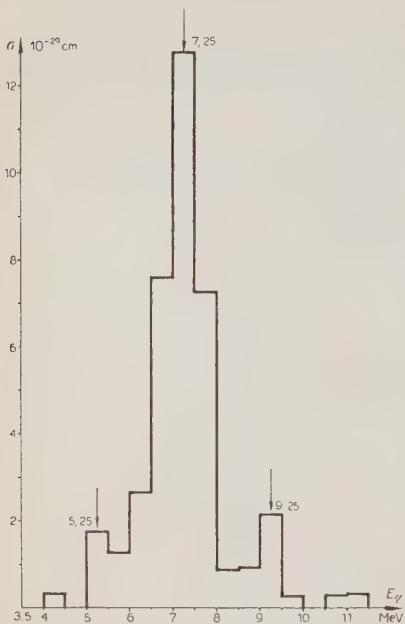


Fig. 2. - Wirkungsquerschnittsverlauf $\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$. (Fehler: mittlerer statistischer Fehler).

wicklung der Platten mit Anidol bei einem pH-Wert von 7,3 ermöglichte eine gute Diskrimination und Ausmessung der Alpha- und Tritonenspuren.

Der Unterschied in der Kordichte zwischen einfach und doppelt geladenen Teilchen ist infolge der Spezialentwicklung sehr ausgeprägt, sodaß auch bei steilen Spuren in der Emulsion eine fehlerhafte Zuordnung ausgeschlossen ist. Für die weitere Kontrolle jedes Ereignisses wird das Impulskriterium verwendet. Als zusätzliche Maßnahme haben wir für das einfallende Gammaspktrum eines Betatrons als Grenzenergie $E_\gamma = 15$ MeV gewählt, so daß weitere störende (γ, α)-Prozesse an N^{14} , O^{16} , Br^{79} , Br^{81} aus energie-

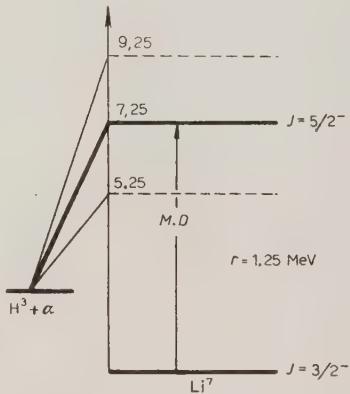


Fig. 3. - Termschema des Li^7 .

γ -Quanten kann das 7,4 MeV Niveau angeregt werden (Compoundkern), der nachher unter Alpha- und Tritonemission zerfällt. Gemäß dieser Vorstellung müssen

(*) $\text{F}^{19}(p, \alpha) \text{ O}^{16} + \gamma$

E_γ : MeV	Intensität
6,13	1
6,9	0,05

(4) F. AJZENBERG und T. LAURITSEN: Rev. Mod. Phys., 24, 321 (1952).

also die kleinen Nebenmaxima ($E_\gamma = 5,25$ MeV $E_\gamma = 9,25$ MeV) weiteren Niveaus im Li^7 entsprechen. Auffallend ähnlich wie beim Kern Be^8 ist deutlich eine Äquidistanz der Niveaus ersichtlich (**).

Die Messung der Winkelverteilung aller Ereignisse, die über das 7,4 MeV Niveau im Li^7 gehen, ist im Gang, sie wird Gewißheit über die Multipolordnung der absorbierten Gammastrahlung geben.

(**) P. ERDÖS, P. SCHERRER, und P. STOLL: *Helv. Phys. Acta* (im Drucke).

A Generalization of the Quantum Mechanics.

M. SCHÖNBERG

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles

(ricevuto il 17 Febbraio 1953)

In the ordinary form of the quantum mechanics the state of a system Σ is described by a wave function $\Psi(t; x)$ depending on the time t and adequate variables x , which may be continuous or discrete. The equation of motion of the states is the time dependent Schrödinger equation:

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t; x) = H\Psi(t; x);$$

H is the hamiltonian of the system. We shall assume, for the sake of simplicity, that the variables x are continuous, each set of values of the x corresponding to a point in a space Ω . Thus in the case of a system formed by n spinless particles (non relativistic) the space Ω can be taken as a $3n$ -dimensional euclidean space. We shall now introduce a linear functional χ of the normalized function $\psi^*(x)$:

$$(2) \quad \chi[t; \psi^*] = \int_{\Omega} \Psi(t; x) \psi^*(x) dx \quad \int_{\Omega} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

It is clear that the states of Σ can be described indifferently by the wave functions $\Psi(t; x)$ or by the functional $\chi[t; \psi^*]$, since $\Psi(t; x)$ determines χ and conversely the knowledge of the functional χ determines $\Psi(t; x)$. This latter point is proved by noticing that the knowledge of the values of the functional χ for the functions $\psi_{\lambda}(x)$ of a complete orthonormal set gives the values of the coefficients $c_{\lambda}(t)$ of the expansion of $\Psi(t; x)$ in terms of the $\psi_{\lambda}(x)$:

$$(3) \quad \Psi(t; x) = \sum_{\lambda} c_{\lambda}(t) \psi_{\lambda}(x),$$

$$(4) \quad c_{\lambda}(t) = \int_{\Omega} \Psi(t; x) \psi_{\lambda}^*(x) dx = \chi[t; \psi_{\lambda}^*].$$

For the sake of simplicity we shall assume that the wave function $\Psi(t; x)$ is normalizable and normalized:

$$(5) \quad \int_{\Omega} |\Psi(t; x)|^2 dx = 1 .$$

In the form of the quantum mechanics we are developing, χ plays the central role and we need an equation of motion for the wave functionals $\chi[t; \psi^*]$. It follows from equations (1) and (2) that the functional $\chi[t; \psi^*]$ defined by (2) satisfies the following equation:

$$(6) \quad i\hbar \frac{d}{dt} \chi[t; \psi^*] = \int_{\Omega} \psi^*(x) H \frac{\delta \chi[t; \psi^*]}{\delta \psi^*(x)} dx .$$

The *linear functionals* $\chi[t; \psi^*]$ which are defined for all the vectors ψ^* of the Hilbert space of the $\psi^*(x)$ are of the form

$$(7) \quad \chi[t; \psi^*] = \int_{\Omega} \Psi(t; x) \psi^*(x) dx ,$$

as a consequence of a well known theorem of Fréchet. It is easily seen that when the linear functional defined by (7) satisfies equation (6) the corresponding function $\Psi(t; x)$ is a solution of (1). Therefore there is a complete equivalence between the set of the normalizable solutions of (1) and the set of the *linear functionals* $\chi[t; \psi^*]$ defined for all the $\psi^*(x)$ of the ψ^* Hilbert space which satisfy the equation (6).

The formalism based on the equation (6) gives a generalization of the quantum mechanics, because (6) admits also *non linear solutions*. An important and very general class of solutions of (6) is given by the functionals $\chi[t; \psi^*]$ which can be expanded in a Volterra series:

$$(8) \quad \chi[t; \psi^*] = \chi[t; 0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{\Omega} \Psi_n(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \psi^*(x_1) \dots \psi^*(x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

The functions $\Psi_n(t; x_1, \dots, x_n)$ satisfy the Schrödinger equations for sets of n non interacting systems Σ :

$$(9) \quad i\hbar \frac{d}{dt} \Psi_n(t; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n H(x_i) \Psi_n(t; x_1, \dots, x_n) .$$

The development of the formalism based on the functional $\chi[t; \psi^*]$ requires a theory of the integration in the ψ^* -space. By expanding ψ^* in a series of orthonormal functions $\psi_{\lambda}^*(x)$

$$(10) \quad \psi^*(x) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}^* \psi_{\lambda}^*(x) ,$$

$\chi[t; \psi^*]$ becomes a function of a discrete infinity of complex variables a_λ^* : We need a definition of the inner product of two functionals (χ_1, χ_2) rather than an integration over the ψ^* -space. A convenient definition of the inner product of two functions $f_1(z_1, \dots, z_r)$ and $f_2(z_1, \dots, z_r)$ of the complex variables z_1, z_2, \dots, z_r can be obtained by the methods of the theory of orthogonal functions of complex variables:

$$(11) \quad (f_1(z_1, \dots, z_r), f_2(z_1, \dots, z_r)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f_1(z_1, \dots, z_r)\}^* f_2(z_1, \dots, z_r) g(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r) d\alpha_1 \dots d\alpha_r d\beta_1 \dots d\beta_r ,$$

$$(11a) \quad \alpha = \operatorname{Re} z, \quad \beta = \operatorname{Im} z;$$

$g(\alpha; \beta)$ is a weight factor. We shall take:

$$(12) \quad g(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r) = \Pi^{-r} \exp \left[- \sum_{k=1}^r |z_k|^2 \right].$$

There is no essential difficulty in the passage to a discrete infinity of complex variables. With the choice of the weight factors (11) we get:

$$(13) \quad (\chi^{(a)}, \chi^{(b)}) = \chi^{(a)}[0]^* \chi^{(b)}[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \Psi_n^{(a)*}(x_1, \dots, x_n) \Psi^{(b)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

In the particular case of a linear functional (5) we have

$$(14) \quad (\chi^{(a)}, \chi^{(b)}) = \int_{\Omega} \Psi^{(a)*}(x) \Psi^{(b)}(x) dx .$$

Thereby the normalization of the linear functionals χ is equivalent to the normalization of the corresponding functions Ψ .

We need rules for the physical interpretation of the χ -formalism which give results equivalent to those of the ordinary quantum mechanics in the case of linear solutions of (6). The χ -formalism leads to a picture of the motion of a quantal system Σ very different from the ordinary one. Indeed, it is clear that $|\chi[t; \psi^*]|^2$ must give the probability at the time t of the « value » ψ^* of the variable ψ^* , with normalized χ and ψ . Since χ corresponds to a pure state of Σ , it follows that in the kinetic condition of Σ described by the linear χ probabilities are assigned to the various states of Σ , although we have obviously a pure state of motion described by the wave function Ψ . There is no contradiction, because the probability of the state $\Psi(t; x)$ at any times t is 1 and the value of the probability of any $\psi(x)$ is very reasonable:

$$(15) \quad |\chi[t; \psi]|^2 = \left| \int_{\Omega} \Psi(t; x) \psi^*(x) dx \right|^2 .$$

Let us assume that H is time independent and that Σ was in the state ψ_0 at the time 0. We have $\Psi(t) = \exp[-(it/\hbar)H]\psi_0$ and the probability of the state ψ at the time t is given by the ordinary transition probability $\left| \int_{\Omega} \psi^*(x) \exp[-(it/\hbar)H] \psi_0(x) dx \right|^2$.

It is clear that we can also assign probabilities to the eigenvalues A' of an observable A . Let us take the simplest case of non degenerate eigenvalues, the probability of the value A' of the quantity A at time t must obviously be the same as that of the corresponding normalized eigenfunction $\psi_{A'}$ of A : $\left| \int_{\Omega} \Psi(t; x) \psi_{A'}(x) dx \right|^2$.

This is the value given by the ordinary form of the quantum mechanics for the probability of observing a value A' in a measurement of A at the time t . *But here the probability appears as an intrinsic property of the kinetic condition of Σ , without reference to the measurement. The probability of obtaining a value A' in a measurement coincides with the probability of A' .*

The above result is not in contradiction with the fact that measurements disturb the condition of a system. The χ -formalism leads to a very simple and satisfactory theory of the measurement. The condition at the time t after the measurement is described by the linear functional $\int_{\Omega} \psi_{A'}(x) \psi^(x) dx$, A' being the observed value, whereas the condition at the time t before measurement was described by $\int_{\Omega} \Psi(t; x) \psi^*(x) dx$.*

The general solutions of (6) are also of great interest. They correspond to kinetic conditions in which the specification of the state of Σ at the initial time 0 is less restrictive than in the ordinary quantum mechanics. They can be used to develop a new form of the statistical quantum mechanics.

A detailed discussion of the present theory will appear later in this journal.

Affine Field Structure of Gravitation and Electromagnetism.

G. STEPHENSON

Department of Physics, University College - London

(ricevuto il 19 Febbraio 1953)

In a recent paper (STEPHENSON and KILMISTER⁽¹⁾) – hereafter referred to as I) a unified field theory of gravitation and electromagnetism has been developed from the metrical properties of a non-Riemannian space-time structure. However, whilst the difficulties associated with the equations of motion of test particles in Einstein's theory (see INFELD⁽²⁾ and IKEDA⁽³⁾) do not arise here, the field equations are identical with the usual formulation of the Maxwell electromagnetic field in a Riemannian space-time. Such a theory cannot be regarded as completely satisfactory, since it is generally maintained that a truly unified theory should indicate a fundamental connection between the two fields. Moreover, the formalism is not sufficiently general to allow the introduction of a meson field variable. For these reasons, it was hoped that the introduction of a non-symmetric affine connection into the metrical struc-

ture would lead to useful extensions of the theory. The resulting affine equations were briefly discussed in I and it was found that the requirement of no change of length in parallel displacement of an arbitrary contravariant vector lead to the fifty-six equations

$$(1) \quad g_{mn;k} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} - g_{ms}\Gamma_{nk}^s - g_{ns}\Gamma_{mk}^s = 0,$$

and

$$(2) \quad A_{m;k} = \frac{\partial A_m}{\partial x^k} - A_s\Gamma_{mk}^s = 0,$$

where the g_{mn} are symmetrical gravitational field variables and the four-vector A_m is associated with the electromagnetic four-potential. These equations, however, are not sufficient to determine the sixty-four components of the affine connection uniquely, eight further conditions being required. Although this arbitrariness in the theory is certainly an undesirable feature, (1) and (2) are of interest since they imply that

$$(3) \quad A_m A^m = \text{constant } (= \beta).$$

(1) G. STEPHENSON and C. W. KILMISTER: *Nuovo Cimento*, **10**, 230 (1953).

(2) L. INFELD: *Nature*, **166**, 1075 (1950); *Act. Phys. Pol.*, **10**, 284 (1951).

(3) M. IKEDA: *Prog. Theor. Phys.*, **7**, 127 (1952).

This relation is identical with the subsidiary condition postulated by DIRAC⁽⁴⁾ in his new classical theory of electrons as a means of destroying the gauge invariance of the electromagnetic field equations. Making use of this relation, one solution of (1) and (2) has been obtained, namely

$$(4) \quad I_{mn}^s = \left\{ \begin{matrix} s \\ mn \end{matrix} \right\} + \frac{\alpha^{sk}}{\beta} (A_k A_{m|n} - A_m A_{k|n}),$$

where the bar indicates covariant differentiation with respect to the symmetric Christoffel connection $\left\{ \begin{matrix} s \\ mn \end{matrix} \right\}$.

However, although the variation of a Lagrangian L of the type

$$(5) \quad L = \int R \sqrt{-g} d\tau,$$

(with the scalar curvature R expressed in terms of (4)) leads to the Einstein gravitational equations, the resulting electromagnetic field equations are exceedingly complicated and seem to bear no resemblance to those of the Maxwell theory.

In the present form, therefore, it appears that the affine properties of the non-Riemannian space-time lead to no useful extensions of the theory and the metrical approach of I must be considered as more satisfactory.

I am grateful to my friend Dr. C. W. KILMISTER for helpful discussion of this work.

⁽⁴⁾ P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc., A*, **209**, 291 (1951).

A D D E N D A

A. LOINGER: **Un semplice modello di due campi interagenti.** *Il Nuovo Cimento*, **9**, 1080 (1952).

Il prof. L. VAN HOVE, al quale esprimo i più vivi ringraziamenti, mi ha cortesemente comunicato alcune osservazioni che desidero rendere note, allo scopo di precisare ulteriormente la questione.

In generale, per la validità del « teorema di ortogonalità », oltre ad un tipo « adatto » di accoppiamento, si richiede anche che il numero delle dimensioni dello spazio ordinario sia sufficientemente elevato. Così nel caso del campo bosonico scalare con sorgenti puntiformi trattato da VAN HOVE⁽¹⁾ è essenziale che lo spazio sia a tre dimensioni; nel caso del mio lavoro, l'invalidità da me rilevata del teorema di ortogonalità trae in sostanza origine dall'essere il problema unidimensionale: nel caso, ad esempio, di due membrane accoppiate, tornerebbe a valere un teorema di ortogonalità.

In conclusione, come scrive il prof. VAN HOVE: « These various facts mean that the difficulties resulting from the orthogonality theorem are of purely mathematical nature, and, if properly dealt with, they are not likely to affect the physical situation. ... the main problem along these lines is now to find a convenient mathematical procedure to deal with these difficulties in physically interesting problems, i.e. for systems which are in no way describable as a set of uncoupled normal modes. This problem is probably not an easy one ».

⁽¹⁾ Vedi nota ⁽²⁾ in *Nuovo Cimento*, **9**, 1080 (1952).

R. LEVI SETTI and G. TOMASINI: **Slow Heavy Mesons from Cosmic Ray Stars.** *Il Nuovo Cimento*, **9**, 1244 (1952).

It has been called to our attention the fact that a phrase of our work could have been interpreted ambiguously. The phrase (pag. 1245, col. 1st, line 29) which reads: « The intersection of the straight line.... » should be constructed as follows: « From the knowledge of the intersection of the straight line given by the latter measurements with the 45° line, we deduce the range where the unknown particle has an ionization equal to 4 times the minimum value ».